

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel

F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

CRANE, L. J.: Thermal Convection from a Horizontal Wire	453
LING, F. F.: A Quasi-Iterative Method for Computing Interface Temperature Distributions	461
MELIGY, A. S., and SHERBINI, M. A.: Energy Levels for the Coulomb Potential with Cut-off	474
PHILIP, J. R.: Analysis of Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient	478
Roy, D.: Resistance on a Circular Cylinder Due to any Number of Vortices Lying in two Rows	502

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BERNASCONI, S., und GOTSCH, G.: Über die Kondensation verschiedener Dämpfe bei adiabatischer Expansion	509
BRÜESCH, P.: Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigem Kupferoxydul zu Kupferoxyd	519
CHRISTELLER, S.: Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren	525

Varia - Miscellaneous - Divers

ILMAC - Internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboratoriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie	527
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	528

ZAMP	Vol. X	Fasc. 5	Pag. 453-532	25. 9. 59
------	--------	---------	--------------	-----------

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 25.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite sFr. 40.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 50.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 25.- per page for pages 17-24, Sw.Frs. 40.- per page for pages 25-32, and Sw.Frs. 50.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata printed without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs.s. 25.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 40.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs.s. 50.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Schweizer Fr. 68.- (DM 68.-), Einzelnummer sFr. 14.-

Annual subscription (6 issues): Swiss francs 68.- (DM 68.-), single copy Sw. Frs. 14.-

Abonnement annuel (6 numéros): Francs suisses 68.- (DM 68.-), le numéro frs.s. 14.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal: Belgien, Dänemark, Finnland, Holland, Italien, Luxemburg, Marokko, Norwegen, Portugal, Schweden

Inserate - Advertisements - Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr./DM 88.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

1959, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland © Printed in Switzerland

Thermal Convection from a Horizontal Wire

By LAWRENCE J. CRANE, Glasgow, Scotland¹⁾

The steady flow considered here is generated by the diffusion of heat from a long thin wire, placed in a horizontal plane, into a uniform fluid which extends indefinitely above the plane. Uniform profiles are found for velocity and temperature in the case of a gas whose coefficients of viscosity and thermal conductivity vary directly as the absolute temperature. The solution given is valid when the vertical distance above the wire is very much greater than the diameter of the wire. The solution is a good approximation to flow in the atmosphere so long as the vertical distances are not so great as to render invalid the assumption that the fluid is uniform throughout. The solution is valid even when the density differences in the flow are large.

Equations of Motion

A system of rectangular Cartesian coordinates is taken with origin at the centre of the wire, x -axis vertically above the wire and y -axis in the horizontal plane in the direction perpendicular to the wire. The equations of momentum and continuity for steady laminar flow are

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - g (\varrho - \varrho_0) \quad (1)$$

and

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

respectively, where (u, v) are the components of velocity with respect to the (x, y) -axes; ϱ and μ are the density and coefficient of viscosity of the fluid respectively (the quantities ϱ_0 and μ_0 , which are used later, refer to the surrounding atmosphere); and g is the acceleration due to gravity.

Equation (1) is the boundary layer equation of momentum. The pressure gradient term has been omitted because the pressure is, in this case, approximately constant in the mixing region. The last term in equation (1) is due to the buoyancy of the fluid.

The diffusion of heat through the fluid is governed by the equation:

$$\varrho u \frac{\partial(C_p T)}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial(C_p T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3)$$

¹⁾ Mathematics Department, The Royal College of Science and Technology.

where T , C_p and κ are the absolute temperature, specific heat at constant pressure and coefficient of heat conduction of the fluid respectively. (T_0 and κ_0 refer to the surrounding atmosphere.) Equation (3) is the boundary layer form of the equation of diffusion of heat.

Equation (2) is automatically satisfied when a stream function ψ defined by

$$\varrho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \varrho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

is introduced. Equations (1) and (3) are simplified by introducing the von Mises change of variable from (x, y) to (x, ψ) . Equations (1) and (3) then become:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu \varrho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) - \frac{g}{u} \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right) \quad (4)$$

and

$$\frac{\partial(C_p T)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa \varrho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \quad (5)$$

respectively.

In the case of a gas, in which $\kappa \propto \mu \propto T$ and in which C_p is a constant, equations (4) and (5) simplify to

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_0 \varrho_0 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{\varphi}{u} \quad (6)$$

and

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa_0 \varrho_0}{C_p} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right), \quad (7)$$

respectively. The variable φ in equation (7) is defined by

$$\varphi = \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) g = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right) g.$$

(This last result follows from the fact that the pressure is approximately constant over the boundary layer.)

Solution of Equations (6) and (7)

A solution of equations (6) and (7) of the type

$$\left. \begin{aligned} u &= x^p f(\eta), \\ \varphi &= x^m h(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where $\eta = \psi/x^n$, is now sought. The functions f and h satisfy the following boundary conditions:

On the vertical axis

$$\eta = 0, \quad f''(\eta) = h'(\eta) = 0,$$

and on the boundaries of the flow

$$\eta = \pm \eta_b, \quad f = \varphi = 0.$$

A third condition on the motion is obtained by integrating equation (7) between the limits $\psi = 0$ and $\psi = \psi_b$ - the boundary of the flow. This gives

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\psi_b} \varphi \, d\psi = 0. \quad (9)$$

It follows from (9) that the total flux of heat I across a horizontal plane is a constant of the flow which is in fact equal to

$$2 \int_0^{\psi_b} \varphi \, d\psi.$$

When the expressions for φ and ψ given by (8) are substituted in (9) it is found that $m + n = 0$ and

$$I = 2 \int_0^{\eta_b} h(\eta) \, d\eta.$$

Two more conditions on the indices m , n and p are obtained when the expressions for u and φ are substituted in (6). These relations, which follow from the requirement that the buoyancy and viscous terms in (6) shall be of the same order of magnitude when x is large, are

$$p - 1 = 2p - 2n = m - p.$$

Similarly the terms in (7) are of the same order of magnitude for large x when

$$-1 = p - 2n.$$

These relations determine the values of m , n and p as $-3/5$, $3/5$ and $1/5$ respectively. These values of m , n , and p entail that η varies between finite limits.

Equations (6) and (7) now reduce to the ordinary differential equations

$$\frac{1}{5} f - \frac{3}{5} \eta f' = \mu_0 \varrho_0 \frac{d}{d\eta} (f f') + \frac{h}{f} \quad (10)$$

and

$$-\frac{3}{5} (h + \eta h') = \frac{\kappa_0 \varrho_0}{C_p} \cdot \frac{d}{d\eta} (f h'), \quad (11)$$

respectively. Equation (11) can be integrated to give

$$-\frac{3}{5} \eta h = \frac{\kappa_0 \varrho_0}{C_p} f h', \quad (12)$$

when the boundary condition $h'(0) = 0$ is used.

The following changes of variables are now made

$$f = \frac{\alpha}{6} F(\xi), \quad h = \frac{2}{135} \alpha^2 H(\xi) \quad \text{and} \quad \xi = \frac{\eta}{\sqrt{\alpha \mu_0 \varrho_0}},$$

where α is a certain constant. Equations (10) and (12) now become

$$6 F - 18 \xi F' = 5 \frac{d}{d\xi} (F F') + 16 \frac{H}{F} \quad (13)$$

and

$$-18 \sigma \xi H = 5 F H', \quad (14)$$

respectively. (σ is the Prandtl number of the atmosphere $C_p \mu_0 / \kappa_0$.) The boundary conditions are:

On the axis of the flow, i. e. on $\xi = 0$,

$$F' = H' = 0,$$

and on the boundaries of the flow which may, by choosing a suitable value of α , be taken at $\xi = \pm 1^2$),

$$F = H = 0.$$

For the special case of $\sigma = 5/9$, equations (13) and (14) have the following exact solution which satisfies the boundary conditions

$$F = H = 1 - \xi^2. \quad (15)$$

Determination of an Approximate Solution of (12) and (13) when σ Is Close to 5/9

Since the value of σ for air is about 0.733, it is of interest to extend the solution given above to cover values of σ near to 5/9.

The method used to solve equations (12) and (13) consists in expanding F and H in the series:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 + \beta F_1 + \beta^2 F_2 + \dots, \\ H &= H_0 + \beta H_1 + \beta^2 H_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where $F_0 = H_0 = 1 - \xi^2$ and $\beta = 9\sigma/5 - 1$. (In the case of air β is about 0.32.)

²) When the limits of ξ are fixed the value of α follows at once from the heat flux integral. It is in fact given by

$$\frac{9}{2} \left(\frac{25}{18} \cdot \frac{I^2}{\mu_0 \varrho_0} \right)^{1/5},$$

when the boundaries of the flow are taken as $\xi = \pm 1$.

The equations for F_1 and H_1 are then found by substituting the series (16) in (12) and (13) and equating the coefficients of β . The equation for F_1 is

$$(1 - \xi^2) F_1''' - \frac{12}{5} \xi (1 - \xi^2) F_1'' - \left\{ \frac{18}{5} (1 - \xi^2) + \frac{16}{5} \right\} F_1' = \frac{32}{5} \xi.$$

This equation reduces to the following equation of hypergeometric type:

$$z(1-z)\zeta'' + \left\{ \frac{4}{5} + \frac{7}{10}(1-z) \right\} \zeta' - \frac{4}{5}\zeta = \frac{4}{5}, \quad (17)$$

when the changes of variable $dF_1/dz = \zeta(z)/(1-z)$ and $z = \xi^2$ are made. The boundary conditions on $\zeta(z)$ are

$$\text{at } z = 0, \quad \zeta \text{ is finite and at } z = 1, \quad \zeta = 0.$$

The solution of equation (17) which satisfies the former condition is

$$\zeta = A F(a, b; c; z) - 1,$$

where the usual notation for the hypergeometric function is used and where

$$a + b = -\frac{3}{10}, \quad ab = \frac{4}{5} \quad \text{and} \quad c = \frac{3}{2}.$$

The constant of integration A is fixed by the boundary condition at $z = 1$. It is in fact

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}.$$

Finally

$$F_1 = \int_1^z \frac{\zeta}{1-z} dz;$$

the lower limit is unity because F_1 vanishes on the boundaries of the flow. The function H_1 satisfies the equation

$$2\xi(H_0 + H_1) + F_1 H_0' + F_0 H_1' = 0.$$

This equation can be integrated to give

$$H_1 = (1-z) \left[\int_0^z \frac{F_1 dz}{(1-z)^2} + \log(1-z) + C \right].$$

The constant C is determined by the condition

$$\int_0^1 H_1 d\xi = 0.$$

This condition follows from the fact that the total flux of heat from the wire is constant.

Change of Variable

The coordinate y is related to ξ by

$$\left. \begin{aligned} y = \int_0^y \frac{d\psi}{\varrho u} &= 6 x^{2/5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha \varrho_0}} \int_0^\xi \frac{d\xi}{F} \left[1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H \right] \\ &= 6 x (Gr)^{-1/4} \int_0^\xi \frac{d\xi}{F} \left[1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

When $\sigma = 5/9$ (18) becomes

$$\left. \begin{aligned} y &= 6 x^{2/5} \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha \varrho_0}} \left[\tanh^{-1} \xi + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \xi \right] \\ &= 6 x (Gr)^{-1/4} \left[\tanh^{-1} \xi + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Gr is the Grashof number of the flow; its value, for this type of motion, is

$$x^{12/5} \left(\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0} \right)^2.$$

Conclusion

A solution of the boundary-layer equations is found for the thermal flow due to a long thin horizontal wire which is heated. When the density of the fluid is sensibly constant, the motion is approximately of 'similar' type. In this case the velocity and temperature distributions are

$$u = \frac{1}{6} \alpha x^{1/5} F(\xi)$$

and

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H(\xi),$$

where ξ is defined by

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{F} = \frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} = \frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4}.$$

When $\sigma = 5/9$, these formulae simplify to

$$u = \frac{\alpha x^{1/5}}{6} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} \right] = \frac{\alpha x^{1/5}}{6} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4} \right],$$

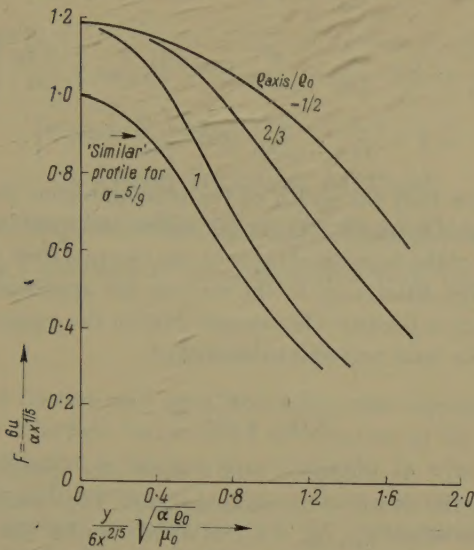


Figure 1

Plot of dimensionless velocity F against $y/6x^{2/5}\sqrt{\alpha\varrho_0/\mu_0}$ for flow in air ($\sigma = 0.733$) when $\varrho_{axis}/\varrho_0 = 1/2, 2/3, 1$. The 'similar' profile when $\sigma = 5/9$ is also given.

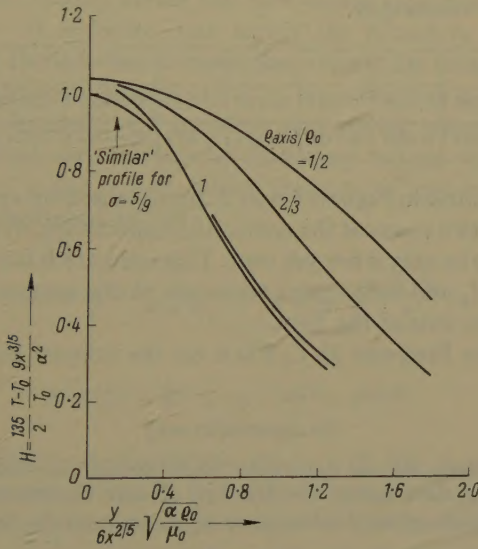


Figure 2

Plot of $H = \frac{135}{2} \cdot \frac{g x^{3/5}}{\alpha^2} \cdot \frac{T - T_0}{T_0}$ against $y/6x^{2/5}\sqrt{\alpha\varrho_0/\mu_0}$ for flow in air ($\sigma = 0.733$) when $\varrho_{axis}/\varrho_0 = 1/2, 2/3, 1$. The 'similar' profile when $\sigma = 5/9$ is also given.

and

$$\begin{aligned}\frac{T}{T_0} &= 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x^{2/5}} \sqrt{\frac{\alpha \varrho_0}{\mu_0}} \right] \\ &= 1 + \frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{y}{6 x} (Gr)^{1/4} \right].\end{aligned}$$

These formulae show that the width of the mixing region at a height x above the source is of order $x(Gr)^{-1/4}$. This result agrees with the work of POHLHAUSEN³⁾ for the width of the boundary-layer of the thermal flow on a vertical plate.

When the density differences in the motion are appreciable the flow is no longer 'similar'. This is because the second term in the square brackets cannot now be ignored. [The term referred to, namely

$$\frac{2}{135} \cdot \frac{\alpha^2}{g x^{3/5}} H,$$

is equal to $(\varrho_0/\varrho - 1)$.] As Figures 1 and 2 show, the greater the density differences the greater the width of the mixing region. For example the half-width of the mixing region when $\varrho_{axis}/\varrho_0 = 1/2$ is about double the half-width of the mixing region when ϱ_{axis}/ϱ_0 is negligible. Now the density differences depend on the flux of heat convected from the wire. Thus the greater the flux of heat from the wire the greater the width of the mixing region, provided other conditions remain unchanged.

$z = \xi^2$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F_1(z)$	0.610	0.563	0.514	0.463	0.410	0.354	0.295	0.232	0.163	0.087	0
$H_1(z)$	0.094	0.055	0.008	-0.025	-0.052	-0.071	-0.083	-0.082	-0.071	-0.047	0

The data presented in Figures 1 and 2 are obtained by approximating to F and H by the first two terms of the series (16) respectively. When $\sigma = 0.733$, the error is expected to be only a few per cent. This estimate is based on the assumption that F_2 and H_2 and subsequent terms are of the same order of magnitude as F_1 and H_1 on the axis of the flow.

I am grateful to Professor D. C. PACK for the interest he has taken in this work.

Zusammenfassung

Eine exakte Lösung für die natürliche Konvektion von einem langen horizontalen Draht wird gegeben, selbst für den Fall grosser Unterschiede in der Dichte. Wenn die Unterschiede in der Dichte klein sind, dann ist die Strömung eine «ähnliche».

(Received: February 2, 1959.)

³⁾ E. POHLHAUSEN in a paper by E. SCHMIDT and W. BECKMANN, *Forsch. Ing.-Wes.* 1, 391 (1930). — This paper is quoted by SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 1st ed. (Pergamon Press, London 1955).

A Quasi-Iterative Method for Computing Interface Temperature Distributions¹⁾

By FREDERICK F. LING, Troy, New York, USA²⁾

1. Introduction

In the study of friction and wear, the latter case especially, it is of importance to know the interface temperature distribution of the surfaces in sliding contact. Such calculation is known to be difficult. In what follows, a simple model of bodies in sliding contact is proposed for the experimentalists and a relatively simple method is developed for the computation of the interface temperature. The method is applicable to more complex models.

Given a stationary semi-infinite solid with a finite plane area ($2l \times 2b$) protruding slightly above a plane surface of the solid. When another semi-infinite solid is slid steadily across this protruding area, temperature rise due to friction results. If radiation loss across the boundary is neglected, the problem of finding the interface temperature rise can be formulated as follows:

The steady state temperature $u(x, y, z)$ for a point in a semi-infinite solid (constant thermal conductivity k_1) with zero initial temperature, and zero temperature gradient normal to the boundary except over a finite area ($-l \leq x \leq l, -b \leq y \leq b, z = 0$), where the rate of heat input per unit area is $q_1(x, y)$, can be expressed as[1]³⁾

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi K_1} \int_{-l}^l \int_{-b}^b q_1(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r}, \quad (1)$$

where

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}.$$

The quasi-stationary temperature $v(x, y, -z)$ for a semi-infinite solid (constant thermal conductivity K_2 and diffusivity α_2) with zero initial temperature, and zero temperature gradient normal to the boundary except over a finite area ($-l \leq x \leq l, -b \leq y \leq b, z = 0$), which moves with a uniform

¹⁾ The research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research, Air Research and Development Command, under Contract No. AF 49(638)-67.

²⁾ Rensselaer Polytechnic Institute, Department of Mechanics.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 473.

velocity V in the direction of x , can be expressed as [1]

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2\pi K_2} \int_{-l}^l \int_{-b}^b \{q_2(\xi, \eta) e^{-V[r-(x-\xi)]/2a_2}\} \frac{d\xi d\eta}{r}, \quad (2)$$

where x here denotes the Lagrangian coordinate with respect to the centroid of the moving heat source, $q_2(x, y)$ is the rate of heat input per unit area.

If the heat generated at the interface is $q_0(x, y)$ then

$$q_1(x, y) + q_2(x, y) = q_0(x, y) \quad (3)$$

and the interface temperature is usually expressed by the equivalence of equations (1) and (2) for $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$ and $z = 0$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0). \quad (4)$$

From equations (3) and (4), a singular integral equation in the unknown $q_1(x, y)$ is resulted. Once the inversion is obtained, i. e. $q_1(x, y)$ found, either equation (1) or (2) can be used to compute the interface temperature.

Numerical methods have been applied to similar problems. Also trial and error schemes have been used to find $q_1(x, y)$. By far most of the approximation methods employed have sprung from BLOK's original work [2] which utilizes the following idea: For q_0 independent of x and y , assume q_1 and q_2 are independent of x and y . Integrate equations (1) and (2) to give $u(x, 0, 0)$ and $v(x, 0, 0)$ in terms of q_1 ($q_2 = q_0 - q_1$). Then arbitrarily equating $u(x, 0, 0)_{\max} = v(x, 0, 0)_{\max}$; this provides an additional equation for the unknown q_1 . Using the value of q_1 thus found, $u^*(x, y, 0)$ and $v^*(x, y, 0)$ are computed, where u^* and v^* refer to u and v for q_1 and q_2 equal to constants. The probable interface temperature, BLOK argued, must lie between u^* and v^* , and therefore can be sketched in. This leaves much to be desired, especially if a more accurate estimate of the interface temperature distribution is sought.

In section 2 A an iterative method is outlined for the computation of the interface temperature. Section 2 B gives a quasi-iterative method which furnishes the advantage of a faster convergence of the process than that outlined in section 2 A. Section 2 C shows the exact solution to the problem for the asymptotic case $R \ll 1$, where R is the Peclet number associated with the problem. Moreover, the iterative process of section 2 A is further justified in a quantitative manner for $R \ll 1$. Section 2 D shows the asymptotic case $R \gg 1$, where the iterative process takes on a simpler form than the general case outlined in 2 A. Section 2 E describes a sample calculation.

Section 3 shows that the interface temperature problem can be used as an analogue problem for inverting a class of singular integral equations of the first kind.

2. Method of Solution for $l \ll b$

A. Iterative Method

In subjecting similar problems to digital computation, CHAO and TRIGGER[3] have found that for $l \ll b$ and q_0 independent of x and y the interface temperature is essentially independent of y (the exception being near $y = \pm b$). This suggests that q_1 and q_2 are essentially independent of y for this case. In what follows it is shown that, based on the assumption that q_1 and q_2 are independent of y , $u(x, 0, 0) = v(x, 0, 0)$ can be evaluated analytically for $l \ll b$ and q_0 independent of x and y . For simplicity, let $K_1 = K_2 = K$. Also let $q_1 = q_0 m(x)$. From equation (3), $q_2 = q_0 [1 - m(x)]$. Define $f = \pi K u(x, 0, 0)/q_0 l$, $s = x/l$, $t = \xi/l$, $\zeta = \eta/l$ and $\beta = b/l$.

Equation (1) becomes

$$f(s) = \int_{-1}^1 m(t) F(s, t) dt, \quad (5)$$

where

$$F(s, t) = \ln \beta \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{s-t}{\beta} \right)^2} \right] - \ln |s - t|,$$

and

$$F(s, t) \simeq \ln 2 \beta - \ln |s - t| \quad \text{for } \frac{b}{l} \gg 1.$$

Furthermore, define $g = \pi K v(x, 0, 0)/q_0 l$ and $R = v l/2 \alpha$, equations (2) and (3) yield

$$g(s) = \int_{-1}^1 \mu(t) G(s, t) dt, \quad \mu(t) = 1 - m(t), \quad (6)$$

where

$$G(s, t) = e^{R(s-t)} I(s - t; R).$$

The function

$$I(s - t; R) = \int_0^\beta \frac{e^{-R \sqrt{(s-t)^2 + \zeta^2}} d\zeta}{\sqrt{(s-t)^2 + \zeta^2}}$$

for certain values of the parameter R have been tabulated in the literature [8]; and for large values of R , it can be approximated by Hankel function of the zeroth order.

Equating equations (5) and (6) as required at the interface for continuity

$$\int_{-1}^1 F(s, t) dt = \int_{-1}^1 m(t) [F(s, t) + G(s, t)] dt. \quad (7)$$

Equation (7) is a singular integral equation of the first kind with a logarithmic singularity. The method of inverting this type of equation as outlined by CARLEMAN [4] and PEARSON [5] is impractical if one is interested in the solution for a wide range of the parameter R . For instance, PEARSON's method calls for the expansion of the non-singular parts of the kernel in polynomials of $(s - t)$; and he concluded that the time required to write out solution is about $2 n^{3/2} h$, where n is the order of higher of the polynomials representing the non-singular parts of the kernel. However, the existing method will be useful in inverting equation (5); the result can then be inserted in equation (6), which becomes a singular integral equation of the second kind. Thus $f(s) = g(s)$ at the interface can be found by iteration.

For $\beta \gg 1$, as stated above, $F(s, t) = \ln 2 \beta - \ln |s - t|$. Equation (5) can be inverted [4]

$$m(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-s^2}} \left[\frac{A^*(f)}{1+a} - \frac{a L^*(f')}{1+a} + L(f') \right] \equiv M(f), \quad (8)$$

where

$$a = \frac{\ln 2 \beta}{\ln 2}, \quad A^*(z) = \frac{1}{\pi \ln 2} \int_{-1}^1 \frac{z(t) dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$L(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} Z(t) dt}{t-s}, \quad L^*(z) = \int_{-1}^1 \frac{L ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}.$$

The problem of $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$ [equation (7)] can be resolved by the following process:

Arbitrarily let $m_0(s)$, the initial trial value of $m(s)$, be equal to zero, then the initial trial value of $g(s)$

$$g_0(s) = \int_{-1}^1 G(s, t) dt$$

and the resulting value of $m(s)$

$$m_1(s) = M(g_0),$$

where $M(g_0)$ is the linear integral operator [equation (8)] operating on $g_0(s)$. The first iterated value of $g(s)$

$$g_1(s) = \int_{-1}^1 [1 - M(g_0)] G(s, t) dt = g_0(s) - T^{(1)}(g_0),$$

where

$$T^{(1)} = \int_{-1}^1 M(g_0) G(s, t) dt$$

after the n -th iteration

$$g_n(s) = g_0(s) + \sum_{r=1}^n (-1)^r T^{(r)}(g_0), \quad (9)$$

where

$$T^{(n)}(g_0) = \int_{-1}^1 M[T^{(n-1)}(g_0)] G(s, t) dt.$$

It may be seen from the kernels $F(s, t)$ and $G(s, t)$ that, although the former is symmetric and the latter skew-symmetric, the integral operator

$$P[z(s)] \equiv \int_{-1}^1 z(t) F(s, t) dt$$

is always greater than the operator

$$Q[z(s)] \equiv \int_{-1}^1 z(t) G(s, t) dt$$

for all values of $-1 \leq s \leq 1$. The extent of the difference between P and Q depends on s and the parameter R . Of course $P = Q$ when $R = 0$.

In view of the above, $g_0 = Q(1)$ and $|M(g_0)| = |P^{-1}(g_0)|$, P^{-1} being the inverse of P , is less than $1/(1 - s^2)$ for $-1 \leq s \leq 1$. The factor $(1 - s^2)^{-1/2}$ is associated with the root singularity at $s = \pm 1$. In other words it may be demonstrated that $|T^{(1)}(g_0)| < |g_0|$ for $-1 \leq s \leq 1$ and $R \neq 0$. Moreover, it may be demonstrated that

$$|T^{(n)}(g_0)| < \dots < |T^{(1)}(g_0)| < |g_0|.$$

Thus equation (9) constitutes an alternating Neumann series whose convergence is assured.

B. Quasi-Iterative Method

The rate of convergence of the above may be slow, in which case the following quasi-iterative scheme will always speed up the iterative process described in section 2 A such that no more than one quasi-iteration would be necessary in most cases.

It is clear, that the closer the initial value of the trial function g_0^* , the more rapid would be the convergence process. Also, if there is an a priori method of finding a close-approximation of the initial trial function g_0^* , the same method

can be used between every successive iterations. After BLOK [2], define

$$f_m(s) = \int_{-1}^1 F(s, t) dt \quad [\text{equation (5) with } m = 1]$$

and

$$g_m(s) = \int_{-1}^1 G(s, t) dt \quad [\text{equation (6) with } \mu = 1].$$

Then define

$$\lambda = \frac{[g_m(s)]_{\max}}{[f_m(s)]_{\max}}.$$

By assuming m and μ to be constants and matching only the maximum temperatures of the mating bodies, m and μ may be found. From equations (5) and (6)

$$m[f_m(s)]_{\max} = (1 - m) [g_m(s)]_{\max}$$

or

$$m = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{and} \quad = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

Thus

$$f_B(s) = \frac{\lambda}{1 + \lambda} f_m(s) \quad \text{and} \quad g_B(s) = \frac{1}{1 + \lambda} g_m(s)$$

must envelope, BLOK suggested, the true value of $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$ and the latter can be interpreted.

Define g_0^* , the initial trial value of g for the quasi-iterative method, to be $(f_B + g_B)/2$ arbitrarily knowing that this value would be much closer to the true value than g_0 in the last section. Using equation (8)

$$m_0^* = M(g_0^*)$$

and using equation (6)

$$g^*(s) = g_0^* - T^{(1)}(g_0^*),$$

where, as before,

$$T^{(n)} = \int_{-1}^1 M [T^{(n-1)}] G(s, t) dt.$$

Similar to equation (9)

$$g_n^*(s) = g_0^* + \sum_{r=1}^n (-1)^r T^{(r)}(g_0^*). \quad (10)$$

Very approximately, $T^{(1)} = \lambda g_0$, $T^{(2)} = \lambda^2 g_0 \dots T^{(n)} = \lambda^n g_0$. Therefore

$$g_n^*(s) = g_0^* \sum_{r=0}^n (-1)^r \lambda^r.$$

Note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n (-1)^r \lambda^r$$

converges to $1/(1 + \lambda)$.

Define

$$g_0^{**} = g_0^* + \frac{g_1^* - g_0^*}{1 + \lambda}.$$

This first quasi-iterative value of g_0^{**} just defined may be shown to be much closer to the true value than g_0^* . Similarly a second quasi-iteration may be used to give an a posteriori check on the rate of convergence of the process. Of course

$$g_0^{***} = g_0^{**} + \frac{g_1^{**} - g_0^{**}}{1 + \lambda}.$$

C. Asymptotic Solution $R \ll 1$

For $R \ll 1$, the problem of finding $f(s) = g(s)$ [equation (7)] is reducible to

$$F(s) = \int_{-1}^1 \mu(t) [1 + k(s - t)] (\alpha - 2k\beta - \ln|s - t|) dt, \quad (11)$$

where

$$F(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\alpha - \ln|s - t|) dt, \quad \alpha = \ln 2, \text{ and } k = \frac{R}{2}.$$

In the manner of PEARSON [5] equation (11) may be inverted exactly and equation (5) or (6) used to compute $f(s) = g(s)$ for $-1 \leq s \leq 1$. To the first order of k ,

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-s^2}} \left\{ \frac{A^*(F)}{1+a} - \frac{a L^*(F')}{1+a} + L(F') \right. \\ \left. + k \left[\frac{b + (1+a-2a^2)s}{(1+a)^2} A^*(F) - \frac{\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)}{1+a} B^*(F) \right] \right. \\ \left. - L(F) + \frac{b-a(1+a)s}{(1+a)^2} L^*(F') + \frac{a}{1+a} L^{**}(F') \right\}, \quad (12)$$

where

$$a = \frac{\ln 2 \beta}{\ln 2}, \quad b = \frac{2 \beta}{\ln 2}, \quad B(z)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{z(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}, \quad L(z)^{**} = \int_{-1}^1 \frac{s L}{\pi \sqrt{1-s^2}} ds$$

and the other integral operators are as defined in section 2 A.

The complexity of equation (12), which is only accurate to the first order of k , justify the use of an approximate method in section 2 B. The fact that, for $R \ll 1$, both equations (5) and (6) possess exact inverses makes it possible to study closer the convergence property of the iterative process outlined in section 2 A and 2 B. Equation (5) has an inverse $m(s) = M(f)$, equation (8). It may be shown that equation (6) possesses an inverse for $R \ll 1$

$$\mu(s) = M(g) + N(g), \quad (13)$$

where

$$N(g) = \frac{R}{\pi \sqrt{1-s^2}} \left\{ \frac{b + (1+a-2a^2)s}{(1+a)^2} A^*(g) - \frac{\left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)}{1+a} B^*(g) \right. \\ \left. - L(g) + \frac{b-a(1+a)s}{(1+a)^2} L^*(g') + \frac{a}{1+a} L^{**}(g') \right\}.$$

Let

$$g_0 = \int_{-1}^1 G(s, t) dt = g + \varepsilon_0,$$

where g is the exact value of $g(s) = f(s)$ and ε_0 is the error in the initial trail. Using equation (8),

$$m_0 = m + M(\varepsilon_0),$$

where m is the correct value of m associated with g . Using equation (6)

$$\left. \begin{aligned} g_1 = g_0 + \varepsilon_1 &= \int_{-1}^1 [1 - m - M(\varepsilon_0)] G(s, t) dt \\ &= g - \int_{-1}^1 M(\varepsilon_0) G(s, t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

where ε_1 is the error after the first iteration.

Using equations (13) and (14)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \int_{-1}^1 [M(\varepsilon_0) + N(\varepsilon_0) - N(\varepsilon_0)] G(s, t) dt \\ &= -\varepsilon_0 + T^{(1)}(\varepsilon_0), \end{aligned}$$

where

$$T^{(1)}(\varepsilon_0) = \int_{-1}^1 N(\varepsilon_0) G(s, t) dt.$$

It is seen that $N(g)$ is of the order of R and that it is demonstrably positive for $-1 \leq s \leq 1$. Similarly

$$\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1} + T^{(1)}(\varepsilon_{n-1}).$$

Thus the convergence of the process is assured. Similar treatment can be made for the quasi-iterative case.

D. Asymptotic Solution $R \gg 1$

The differential equation corresponding to equation (6) is

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial (x/V)} \quad (15)$$

recalling g corresponds to $v(x, 0, 0)$.

For R large BLOK has found that $\partial^2 v / \partial x^2$ and $\partial^2 v / \partial y^2$ are essentially zero. Thus equation (15) is approximately

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial (x/V)}. \quad (16)$$

The integral representation of the solution to the boundary-value problem governed by equation (16), which holds in a semi-infinite solid with zero initial temperature and zero temperature gradient normal to the boundary except over a strip $-l \leq x \leq l$, is

$$g(s) = \int_{-1}^s \frac{\mu(t) dt}{\sqrt{\frac{2R}{\pi} (s-t)}} \quad (-1 \leq s \leq 1), \quad (17)$$

where the dimensionless quantities g , R etc. are as defined in section 2 A.

Equation (17) is ABEL's integral equation whose inverse is

$$\mu(s) = k \int_{-1}^s \frac{g'(t) dt}{\sqrt{s-t}}, \quad (18)$$

where $k = \sqrt{2R/\pi^3}$.

For all practical cases, where equation (17) applies, $k < 1$. Equation (5) may be written as

$$f(s) = \int_{-1}^1 [1 - \mu(t)] (\alpha - \ln |s - t|) dt. \quad (19)$$

Combining equations (18) and (19) for $-1 \leq s \leq 1$,

$$f(s) = f_0(s) - k \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^s \frac{f(t') dt'}{\sqrt{t - t'}} \right) (\alpha - \ln |s - t|) dt, \quad (20)$$

where

$$f_0(s) = \int_{-1}^1 (\alpha - \ln |s - t|) dt.$$

Equation (20) is a singular integral equation of the second kind; if $k < 1$ and the integral in equation (20) is bounded, the solution is expressible in the form of an alternating Neumann series. In other words,

$$f_n(s) = f_0(s) + \sum_{r=1}^n (-k)^r T^{(r)}(f_0),$$

where

$$T^{(r)} = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^t \frac{\frac{d}{dt'} [T^{(r-1)}(f_0)] dt'}{\sqrt{t - t'}} \right\} (\alpha - \ln |s - t|) dt.$$

E. Example

An example is carried out for $R = 1$ and $\beta = 4$. The case of $R = 1$ is chosen for illustration because on the one hand, the solution cannot be reached accurately by the asymptotic solutions for $R \ll 1$ or $R \gg 1$, and on the other hand the Kernel $G(s, t)$ cannot be approximated by the Hankel function. Thus the case of $R = 1$ represents a case in the most difficult range of the parameter R . The quasi-iterative procedure of section 2 B is followed. The integrals are evaluated with the aid of an IBM 650 digital computer. Integrations near the neighborhood of singular points are evaluated analytically while integration over the non-singular portions are evaluated according to SIMPSON's rule. The over-all computational accuracy is estimated at $1\frac{1}{2}\%$ at the worst locations.

Figure 1 shows $g_0^* = (f_B + g_B)/2$, where f_B and g_B are as defined in section 2 B. g_0^{**} and g_0^{***} are the result of the first and second quasi-iterations respectively. Figure 2 shows a plot of f_B , g_B and g_0^{***} . It may be noted that f_B and g_B do not envelop g_0^{***} at all points.

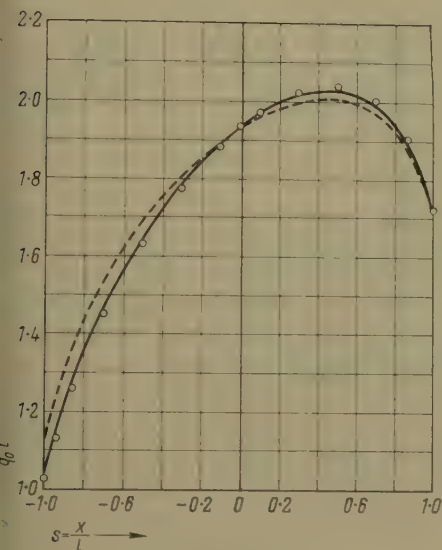


Figure 1

Distribution of interface temperature for $R = 1$, $\beta = 4$. — g_0^* first trial; $\circ\circ\circ$ g_0^{**} second trial; — g_0^{***} final value.

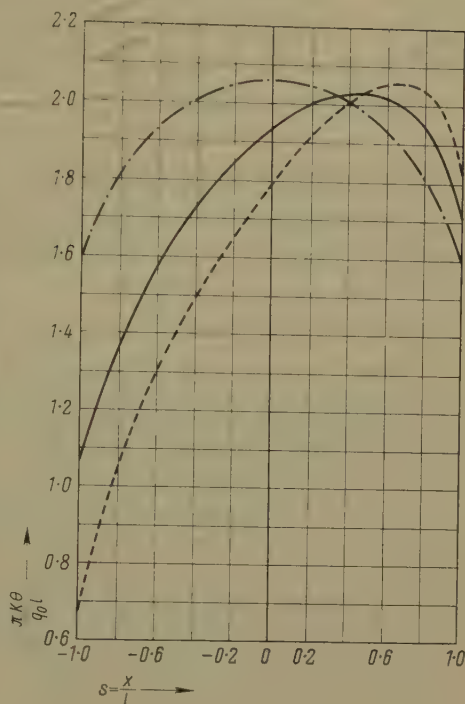


Figure 2

Temperature distribution g_0^{***} shown together with Blok's bounds g^B and f^B . — g^B ; - · - f^B ; — g_0^{***} .

3. Other Applications

The interface temperature problem may be used as an analogue problem for inverting a class of singular integral equations of the first kind as a result of the above analysis. Given

$$h(s) = \int_a^b m(t) H(s, t) dt, \quad (21)$$

where $h(s)$ is continuous and $H(s, t)$ has an inherent singularity at $s = t$, a and b are finite. The inversion of this type of equation have been discussed (see for instance [7]). The following method will be quite generally useful and simple to apply if (1) the kernel $H(s, t)$ can be split into two parts, $F(s, t)$ and $G(s, t)$, such that $F(s, t)$ possesses an exact inverse; (2) numerical evaluation of a set of integrals are permitted; and (3) the particular $H(s, t)$ are so split into $F(s, t)$ and $G(s, t)$ that certain convergence property is satisfied.

Let

$$H(s, t) = F(s, t) + G(s, t), \quad f(s) = \int_a^b \mu(t) F(s, t) dt, \quad g(s) = \int_a^b m(t) G(s, t) dt,$$

$p(t) = P(h)$, the inverse of the equation

$$h(s) = \int_a^b p(t) F(s, t) dt.$$

Then equation (21) is equivalent to the following problem:

$$f(s) = g(s), \quad p(s) = \mu(s) + m(s) \quad (a \leq s \leq b). \quad (22)$$

This equivalence is easily seen because equations (22) mean

$$f(s) = \int_a^b [p(t) - m(t)] F(s, t) dt = g(s) = \int_a^b m(t) G(s, t) dt$$

or

$$\int_a^b p(t) F(s, t) dt = \int_a^b m(t) [F(s, t) + G(s, t)] dt$$

and by the definition of $p(t)$ and $H(s, t)$,

$$h(s) = \int_a^b m(t) H(s, t) dt.$$

To invert equation (22), let

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^b [p(t) - \mu(t)] G(s, t) dt \\ &= \int_a^b p(t) G(s, t) dt - \int_a^b \mu(t) G(s, t) dt. \end{aligned}$$

But $p(t) = P(h)$, $\mu = P(f)$ and $P(f) = P(g)$ as required by the problem, therefore

$$g(s) = \varphi(s) - \int_a^b P(g) G(s, t) dt, \quad (23)$$

where

$$\varphi(s) = \int_a^b P(h) G(s, t) dt.$$

Equation (23) can be solved by iteration. Of course the convergence property has to be examined in each case. Once g is found to any degree of accuracy desired

$$\mu(s) = P(g), \quad m(s) = p(s) - \mu(s).$$

Problems which could easily be treated in the above fashion, among others, are the Rijke-tube problem in fluid mechanics [6] and the welding problem in which the heat distribution of a travelling heat source is sought for a given temperature profile.

4. Conclusion

For the proposed model of sliding contact, temperature distribution of the interface due to friction may be calculated as accurately as desired. The quasi-iterative method reduces the number of necessary quasi-iteration to no more than one in most cases. An example is given to show this point.

The method may be applied to more complex models and extensions can easily be made for the proposed model to accommodate a general heat input distribution due to friction. Moreover, the factor $(1 - x^2)^{1/2}$ always occurs in the distribution function of the singular integral equation with logarithmic singularity; by a suitable transformation this factor may be cancelled [6]. This would simplify computation for those who prefer using digital computers. In other words the uncertainty at an end point experienced by CHAO and TRIGGER can be removed.

Although the nature of the method is iterative, the labor involved is less than that required for numerical solution, given a degree of computational accuracy.

By analogy the method may be used to invert a class of singular integral equations.

Acknowledgments

Thanks are due to Professors HIRSH COHEN and RICHARD DiPRIMA for their helpful discussions and to Mr. C. W. NG for working out the example.

REFERENCES

- [1] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER *Conduction of Heat in Solids* (Oxford University Press, London 1957).
- [2] H. BLOK, Inst. Mechanical Engineers, Proc. General Discussion on Lubrication and Lubricants 1, 222 (1937).
- [3] B. T. CHAO and K. J. TRIGGER, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 80, 311 (1958).
- [4] T. CARLEMAN, Math. Z. 15, 111 (1922).
- [5] C. E. PEARSON, Quart. appl. Math. 15, 203 (1957).
- [6] R. C. DiPRIMA, US Navy Department Report, Contract No. N5-OR1-07666 (Harvard University, June 1956).

- [7] W. R. SEARS, *General Theory of High Speed Aerodynamics* (Princeton University Press, 1954).
 [8] *Tables of Generalized Exponential Integrals and Functions* (Harvard University Mathematical Tables, vol. XXI, 1949).

Zusammenfassung

Es wird ein einfaches Modell für gleitenden Kontakt vorgeschlagen, zur Ermittlung der Verteilung des Verschleisses, die ihrerseits mit der Verteilung der Temperatur längs der Gleitfläche zusammenhängt. Dabei wird eine relativ einfache Methode entwickelt für die Berechnung der Verteilung der Gleitflächentemperatur. Die Methode ist im wesentlichen iterativ; im besondern verringert die hier entwickelte quasi-iterative Methode die Anzahl der Quasi-Iterationen beträchtlich – in den meisten Fällen auf nicht mehr als eine. Dieses Verhalten wird an einem Beispiel erläutert. Obwohl die dargestellte Methode iterativ ist, erfordert sie weniger Rechenarbeit, als für die numerische Lösung des Problems bei vorgeschriebener Genauigkeit notwendig wäre.

Es wird auch gezeigt, dass das Modell als Analogon für die Inversion einer Klasse von singulären Integralgleichungen erster Art dienen kann.

(Received: January 20, 1959.)

Energy Levels for the Coulomb Potential with Cut-off

By ABD EL SADEK EL MELIGY and MAHMOUD AHMED EL SHERBINI,
 Alexandria, Egypt¹⁾

Introduction

The absorption band spectrum of alkali-halide crystals has been attributed to the excitation of electrons trapped in holes formed by the removal of negative ions. For the potential field of such electrons TIBBS [3]²⁾ proposed a Coulomb field with a horizontal cut-off which is represented by the potential function

$$V = -\frac{e^2}{K_0 r_0} \quad (r < r_0); \quad V = -\frac{e^2}{K_0 r} \quad (r > r_0), \quad (1)$$

where r_0 is the radius of the hole and K_0 is the dielectric constant. He computed the electronic energy levels by numerical integration methods. WANNIER [4], however, has shown that the problem could be solved analytically, though not rigorously, for energy levels lying very high above the potential energy in the hole. The object of this work is to present a rigorous solution valid for low as well as high energy levels. This has been achieved by using exact expansions for the wave functions.

¹⁾ Faculty of Science, University of Alexandria.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 477.

The Wave Functions

The radial wave equation for the potential field (1) is

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \left(-\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{2\alpha}{r_0} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) F = 0 \quad (r < r_0), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \left(-\frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{2\alpha}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) F = 0 \quad (r > r_0), \quad (3)$$

where $\alpha = m e^2 / K_0 \hbar^2$ and the energy $E = -\hbar^2 \alpha^2 / 2 m k^2$; k is our unknown which has to be determined.

The solution of equation (2), which vanishes at the origin, is

$$F_1 = x J_{l+1/2} \left[\frac{x^2}{2x_0} \left(1 - \frac{x_0^2}{16k^2} \right)^{1/2} \right], \quad (4)$$

and the solution of equation (3), which vanishes at infinity, can be written as

$$F_2 = x f_{k,l+1/2}(x) - x \tan(\pi k) g_{k,l+1/2}(x), \quad (5)$$

where

$$x = 2(2\alpha r)^{1/2},$$

$$f_{k,l+1/2}(x) = 2x^{-1} k^{l+1} I_{k,l+1/2} \left(\frac{x^2}{4k} \right) \quad (7)$$

and

$$g_{k,l+1/2}(x) = -2x^{-1} \frac{k^{l+1}}{\Gamma(k+l+1)} N_{k,l+1/2} \left(\frac{x^2}{4k} \right); \quad (8)$$

x_0 being the value of x at $r = r_0$ and the functions $I_{k,m}(z)$ and $N_{k,m}(z)$ being the confluent hypergeometric functions [1]. The functions F_1 and F_2 represent the appropriate wave functions of the electron in the potential field (1).

To evaluate the functions $f_{k,m}(x)$ and $g_{k,m}(x)$ as well as their derivatives it is necessary to derive their recurrence formulae. Applying the recurrence formulae given by POWELL [2] for the Coulomb wave functions, one can deduce the following formulae for the function $f_{k,m}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left[\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right] f_{k,m+1}(x) &= \left(m + \frac{1}{2} \right) k^2 f_{k,m-1}(x) \\ &+ 2mk^2 \left(1 - \frac{8m^2-2}{x^2} \right) f_{k,m}(x), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} f_{k,m}(x) &= \left[\frac{2m}{x} - \frac{x}{2(2m+1)} \right] f_{k,m}(x) \\ &- \frac{x}{2(2m+1)} \left[1 - \frac{(2m+1)^2}{4k^2} \right] f_{k,m+1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Similar formulae hold for the other function $g_{k,m}(x)$ and its derivative.

Expansions of the Wave Functions

For high energy levels, WANNIER has applied the zero energy limiting formulae, i. e. the asymptotic values when k tends to infinity, which are as follows:

$$f_{k,m}(x) \sim J_{2m}(x), \quad (11)$$

$$g_{k,m}(x) \sim -k^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + k\right)} Y_{2m}(x), \quad (12)$$

where J_{2m} and Y_{2m} are the Bessel functions of the first and second kind respectively.

Now for exact representation, one can extend the result (11) to finite values of k by assuming the following expansion:

$$f_{k,m}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v J_{2m+v}(x). \quad (13)$$

On equating the coefficients of powers of x on both sides of this equation, it is found that $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = (2m+1)/32k^2$, $a_3 = -1/96k^2$ and in general, for $v \geq 3$,

$$32k^2 v a_v = 2(2m+v-1)a_{v-2} - a_{v-3}. \quad (14)$$

On the other hand, it has not been possible to extend the result (12) to finite values of k . However, one can express $g_{k,m}(x)$ in terms of $f_{k,m}(x)$ functions by applying the expansion of $N_{k,m}(z)$ given by MELIGY [1]. Thus the exact representation of $g_{k,m}(x)$ takes the following form:

$$\begin{aligned} \pi g_{k,m}(x) = & -f_{k,m}(x) \left[\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2} + m + k\right) + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2} - m + k\right) \right. \\ & \left. - \psi(2m) - \psi(2m+1) + \log \frac{x^2}{4k} \right] \\ & + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{\Gamma(2m)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2k}\right)^v}{v! (2m+v)^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}v + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}v + k\right)} f_{k,v/2}(x) \\ & + k^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + k\right)} \Gamma(2m+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-2m} \\ & \times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2k}\right)^v}{v! (2m-v)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}v + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}v + k\right)} f_{k,v/2}(x), \end{aligned} \quad (15)$$

where ψ is the logarithmic derivative of the gamma function and the term $v = 2m$ in the last series is to be discarded. The function $g_{k,m}(x)$ could be easily calculated from (15) if one computes the functions $f_{k,n/2}(x)$ from (13) and the recurrence formula (9).

Evaluation of the Energy Levels

The values of k are determined by equating, at $x = x_0$, the logarithmic derivatives with respect to x of the functions F_1 and F_2 in equations (4) and (5). Thus, for s -states we have

$$\tan \pi k = \frac{A f_{k,1/2}(x) + (1 - k^{-2}) f_{k,3/2}(x)}{A g_{k,1/2}(x) + (1 - k^{-2}) g_{k,3/2}(x)} \quad (16)$$

and for other states

$$\tan \pi k = \frac{f_{k,l-1/2}(x) + B f_{k,l+1/2}(x)}{g_{k,l-1/2}(x) + B g_{k,l+1/2}(x)}, \quad (17)$$

where

$$A = 1 - \frac{8}{x^2} + \frac{8}{x^2} y \cot y, \quad B = 1 - \frac{8l}{x^2} y \frac{J_{l-1/2}(y)}{J_{l+1/2}(y)},$$

$$y = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{16k^2} \right)^{1/2}.$$

x_0 has been replaced by x for simplicity. Equations (16) and (17) do not contain the unknown k explicitly. However, their right-hand sides are slowly varying functions of k and so the equations can be solved for k by successive approximations. Starting with $k = n$ on the right, where n is the principal quantum number, two operations are sufficient to give an accurate value for k . For example, in the case where $x = 2.62$, the value of k for the 1 s state is 1.161 which is considered to be more accurate than the value given by TIBBS (1.155) or that given by WANNIER (1.153).

REFERENCES

- [1] A. S. MELIGY, Nuclear Physics 7, 610 (1956).
- [2] J. L. POWELL, Phys. Rev. 72, 626 (1947).
- [3] S. R. TIBBS, Trans. Faraday Soc. 35, 1471 (1939).
- [4] G. H. WANNIER, Phys. Rev. 64, 358 (1943).

Zusammenfassung

Die Absorptionsbanden der Alkalihalogenidkristalle werden auf Elektronen zurückgeführt, die an leeren Gitterstellen eingefangen sind. Als Feld wird ein bei kleinen Distanzen horizontal abgeschnittenes Coulomb-Feld angesetzt. Die Eigenwerte werden im ganzen Energiebereich aus einer genauen Reihenentwicklung der Lösungen der Schrödinger-Gleichung bestimmt.

(Received: February 10, 1959.)

Analysis of Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient

By JOHN R. PHILIP, Pasadena, California, USA^{1,2)}

1. Boundary Layer Equations

We are concerned here with the boundary layer developed along a flat plate of effectively zero thickness, with the leading edge of the plate at $x = 0$ and the plate lying along the x -axis. The free stream velocity of the incompressible fluid, U , is directed parallel to the x -axis. We denote by y the ordinate normal to the plate, and confine our attention to the region $y \geq 0$. We here assume that the boundary layer is turbulent right from the leading edge.

Let u, v be the components of mean fluid velocity in the x and y -directions. If then, we equate for any volume element of the fluid, $dx \cdot dy$, the mean rate of gain of momentum in the x -direction to the x -resultant of the shear forces, and use the continuity requirement,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

we obtain

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1.2)$$

where τ is the shear stress and ρ is the fluid density. Equation (1.2) also follows immediately by analogy with the equations for the laminar boundary layer due to PRANDTL [1]³⁾. Now, recognizing the turbulent and viscous components of the shear stress, we may write

$$\frac{\tau}{\rho} = (K + \nu) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.3)$$

where K is the eddy viscosity and ν the kinematic viscosity. Now

$$K = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (1.4)$$

¹⁾ Address for 1958: California Institute of Technology. Permanent address: Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Canberra, Australia.

²⁾ Supported in part by a grant from the Rockefeller Foundation RF 56160.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 501.

where l is the mixing length as conceived by PRANDTL [2]. In the present paper we introduce, and explore the consequences of, the hypothesis that

$$l = k y^m, \quad (1.5)$$

where k and m are to be discussed in detail later. At this point we need only indicate that k is positive, non-zero, and a function of *relative* distance from the plate across the boundary layer and that m is a constant.

(This introduction of a mixing-length formulation is quite empirical, and finds justification solely in the unified treatment, and the agreement with experiment, we are able to present later in this paper, and in subsequent work. Note that we could have introduced as a general expression for the turbulent shear stress

$$k^2 y^{2m} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^n \frac{\partial u}{\partial y}.$$

The experimental fact that local drag coefficients over *rough* surfaces are independent of U leads back to exactly the case we consider here, i. e., $n = 1$.)

We now neglect ν as small compared to K . This evades the problem of the laminar sublayer, and, also, as we see later, is inadmissible at the extreme outer edge of the boundary layer. Then use of equations (1.3), (1.4) and (1.5) in equation (1.2) leads to

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[k y^m \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2. \quad (1.6)$$

$\partial u / \partial y \geq 0$ in the region we consider, so that we effect a typographical economy by writing $\partial u / \partial y$ for $|\partial u / \partial y|$ in equation (1.6) and subsequent equations. Here, and subsequently, we could reduce the number of equations by one by introducing a stream function. However, the treatment would become more complicated in other ways, so we retain equations (1.1) and (1.6) as the boundary layer equations.

2. Reduction of Boundary Layer Equations to Ordinary Form

Substitutions (2.1) used in equations (1.6) and (1.1) enable their reduction to the ordinary equations (2.2) and (2.3):

$$m < \frac{3}{2}, \quad \eta = y x^{-1/(3-2m)}, \quad \chi = u U^{-1}, \quad \zeta = v x^{(2-2m)/(3-2m)} U^{-1}, \quad (2.1)$$

$$- \frac{\eta \chi}{3-2m} \cdot \frac{d\chi}{d\eta} + \zeta \frac{d\chi}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\eta}{3-2m} \cdot \frac{d\chi}{d\eta}. \quad (2.3)$$

This reduction is permissible only if the boundary conditions governing equations (1.6) and (1.1) can also be reduced by substitutions (2.1) into forms independent of x and y . This would be so for the boundary conditions of the corresponding laminar problem, if these could be carried over legitimately into this turbulent problem. These conditions, which we shall not use as they stand, are:

$$x > 0, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (2.4)$$

$$x = 0, \quad u = U, \quad (2.5)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Use of conditions (2.4) and (2.6) would imply that equation (1.6) holds throughout the infinite region $y \geq 0$. In fact, there are two regions in which equation (1.6) fails. In this section we discuss the region close to the plate, deferring the question of the outer limit of the boundary layer until the following section. In the case of the smooth plate, the region of failure of equation (1.6) near $y = 0$ may be identified with the laminar sub-layer, and the failure may be explained as due simply to the fact that in this region ν is not small in comparison with K . For the rough plate matters are more complicated; however, we can certainly state that, in this case, the putative origins for the velocity profile, the shearing stress and the mixing length will, in general, all differ, and it is very unlikely that equation (1.6) will be admissible in the immediate neighborhood of $y = 0$.

We may allow for failure of equation (1.6) close to $y = 0$ by relaxing condition (2.4) and assuming that

$$x > 0, \quad y = y_0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (2.7)$$

where y_0 is some small value of y , which remains free to vary with x . To preserve the similarity which permits use of equations (2.2) and (2.3), it is necessary that y_0 be of the form $y_0 = \eta_0 x^{1/(3-2m)}$, with η_0 a constant.

Such a relationship implies, roughly, that the laminar sub-layer [or, in the case of the rough plate, the region in which equation (1.6) fails] occupies a constant fraction of the thickness of the boundary layer. It would be more realistic to expect that the *absolute* rather than the *relative* thickness of this region should remain constant⁴). Nevertheless, despite the slight inconsistency in this boundary condition, we are able, with its use, to proceed to a similarity solution which retains most aspects of the physical problem, and apparently gives good results for all but the innermost zone of the boundary layer.

⁴) The well-known result that $y u_*/\nu \approx 10$ at the outer limit of the laminar sub-layer implies that sub-layer thickness varies as u_*^{-1} . It follows that, for $m = 7/8$, sub-layer thickness increases with x as $x^{0.1}$.

3. Convergence of the Shear Integral

Integrating equation (2.3) gives

$$\zeta = \frac{1}{3-2m} \int_0^{\chi} \eta d\chi. \quad (3.1)$$

Using this in equation (2.2) and integrating, we obtain

$$\frac{1}{3-2m} \int_{\chi}^1 \left[\eta \chi - \int_0^{\chi} \eta d\chi \right] d\chi = \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2. \quad (3.2)$$

We introduce τ_* by means of equation (3.3)

$$\tau_* = \frac{\tau}{\rho U^2} \chi^{(2-2m)/(3-2m)}. \quad (3.3)$$

Evidently

$$\tau_* = \left(\frac{u_*}{U} \right)^2 \chi^{(2-2m)/(3-2m)} = \frac{1}{2} c'_f \chi^{(2-2m)/(3-2m)}, \quad (3.4)$$

where u_* and c'_f have their usual significance of 'friction velocity' and 'local drag coefficient'. It follows from equations (1.3), (1.4), (1.5), and (3.3) that

$$\tau_* = \left(k \eta^m \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2. \quad (3.5)$$

τ_* is the analogue of shear stress in our system of reduced variables. Denoting by $\tau_{*,0}$ the value of τ_* at $\eta = \eta_0$ (i. e. the reduced wall shear), we have

$$\tau_{*,0} = \frac{1}{3-2m} \int_0^1 \left[\eta \chi - \int_0^{\chi} \eta d\chi \right] d\chi. \quad (3.6)$$

Obviously $\tau_{*,0}$ is finite in the physical application, and it is accordingly necessary that the integral on the right hand side of equation (3.6) be convergent. We designate this integral the 'shear integral'. It seems certain that this integral is divergent for values of m of interest in the present context, *if we retain (2.6) as the outer boundary condition governing the motion*. The following short investigation of the divergence of the integral is quite non-rigorous, but does give some insight into the problem.

Firstly, it will be noted that, of $\eta \chi$ and $\int_0^{\chi} \eta d\chi$, $\eta \chi$ is the dominant term, and especially so in the region close to $\chi = 1$, if $\eta \rightarrow \infty$ as $\chi \rightarrow 1$. We may therefore reasonably assume that the shear integral is convergent or divergent according as $\int_0^1 \eta \chi d\chi$ is convergent or divergent. We introduce χ' to denote

$(1 - \chi)$ and we suppose that as $\chi \rightarrow 1$ (i. e. $\chi' \rightarrow 0$), $\eta \rightarrow \infty$ as does $(\chi')^\alpha$. Then for χ' small, we may replace $\eta \chi$ by η , and it is seen that $\int_0^{\chi'} \eta d\chi'$ can be convergent only if $\alpha > -1$. Also $\eta \rightarrow \infty$ as $\chi' \rightarrow 0$ [cf. conditions (2.6)] only if $\alpha < 0$. Therefore $0 > \alpha > -1$.

Provided k remains of constant order of magnitude (an assumption confirmed later), dimensional analysis of equation (3.2) gives the result

$$\eta \chi' \propto \eta^{2m-2} (\chi')^2, \quad \text{i. e. } \alpha = \frac{1}{3-2m}. \quad (3.7)$$

It follows that the integral can be convergent only for $m > 2$, a range of values for which substitutions (2.1) are not applicable (and which would, in any case, have little bearing on the physical problem). We therefore conclude that the shear integral under consideration is divergent. (Note that a similar treatment of the corresponding integral for the laminar boundary layer gives the result that $\eta \rightarrow \infty$ as does the inverse error function of χ' . Comparison with the error function then confirms the convergence of the shear integral in the laminar case.)

The explanation of this difficulty centers on condition (2.6). This, if adopted, would imply that the turbulent regime extends throughout the whole infinite region $y > 0$ and would neglect ν as small in comparison with K in this region. It is evident that such a formulation would lead to such small values of K at large y that u would approach U so slowly that the shear integral would be divergent. Clearly the integral would be convergent if the fact that the 'viscosity' cannot be less than ν were incorporated into the formulation (cf. preceding remark on convergence of the laminar momentum integral).

The most straightforward way of avoiding this impasse is to retain equation (1.6), but to restrict its region of application by replacing (2.6) with

$$y = y_\delta, \quad u = U \quad (3.8)$$

and adding a further condition that the reduced wall shear, $\tau_{*,0}$, is given. This may be expressed in the form

$$\int_{y_0}^{y_\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \tau_{*,0} U^2 x^{-(2-2m)/(3-2m)}. \quad (3.9)$$

For $\tau_{*,0}$ in (3.9) to be independent of x , it is necessary that $y_\delta = \eta_\delta x^{1/(3-2m)}$, where η_δ is independent of x . The revised conditions replacing (2.6) are then (in terms of the reduced variables) (3.6) and

$$\eta = \eta_\delta, \quad \chi = 1. \quad (3.10)$$

Either η_δ or $\tau_{*,0}$ may be taken as the given parameter specifying the motion. These two quantities are uniquely related (for given m and k).

In the following sections 4 and 6 we make appeal to the available experimental data in order to deduce an appropriate numerical value of m and an appropriate k -function. In this way we reduce the general formulation developed here to a particular form both amenable to numerical analysis and in consonance with experiment. Once m is fixed, $\tau_{*,0}$ can be discussed more fully than hitherto; this is done in section 5.

4. Numerical Value of m

The preceding analysis implies the following relationships:

- (a) Boundary layer thickness, y_δ , is proportional to $x^{1/(3-2m)}$;
- (b) local drag coefficient, c'_f , is proportional to $x^{-(2-2m)/(3-2m)}$.

(a) Boundary Layer Thickness

It is generally accepted that, for the fully developed turbulent boundary layer over the flat plate (smooth or rough) at zero incidence with zero pressure gradient, $y_\delta \propto x^{0.80}$. Data on this point for smooth plates due to SCHULTZ-GRUNOW [3] and to TOWNSEND [4] (virtual origin — 21 cm) are shown in Figure 1.

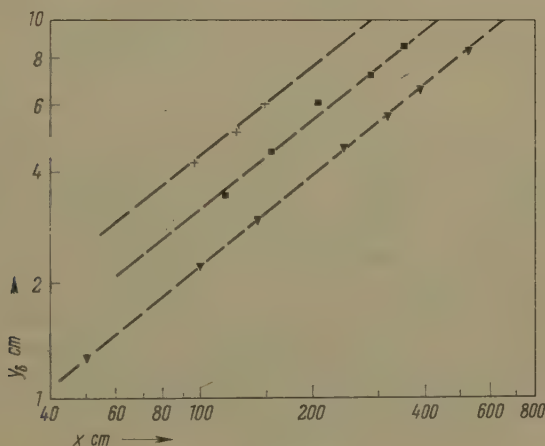


Figure 1

Thickness of turbulent boundary layers with zero pressure gradient. Fitted lines are for $y_\delta \propto x^{0.8}$.
+ TOWNSEND [4]; ■ CORRSIN and KISTLER [5]; ▼ SCHULTZ-GRUNOW [3].

Both do, in fact, fit this relationship quite well. The data of CORRSIN and KISTLER [5] for a rough corrugated surface also fits the 0.8 power law fairly well, when the origin of y_δ is taken at the top of the corrugations and the virtual

origin of x at -36 in. However, the confirmation of the 0.8 power law, which we provisionally accept here, is not conclusive, since much of it relies on inferred virtual origins of x . The 0.8 power law for boundary layer thickness corresponds to $m = 0.875$.

(b) Local Drag Coefficient

Reference [6] (p. 439) summarizes most of the data available on drag coefficients for smooth flat plates at zero incidence with zero pressure gradient. In the range $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$ ($R = Ux/\nu$), c'_f is found to be proportional to $x^{-0.20}$ to a good approximation. However, for the full range of data $2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8$ a better fit is obtained when the exponent is made -0.17 .

Primary data on drag coefficients for rough plates are not available to the author. However, the Schlichting interpolation formula (reference [7], p. 381; [6], p. 449) for the range $10^2 < x/\varepsilon < 10^6$, where ε is the 'equivalent sand roughness',

$$c'_f = \left(2.87 + 1.58 \log \frac{x}{\varepsilon} \right)^{-2.5}, \quad (4.1)$$

may be recast into the form,

$$c'_f = (\text{function of } \varepsilon) \cdot x^\alpha, \quad (4.2)$$

where the best fit is to be found with $\alpha = 0.193$ (see Figure 2).

It follows that the most suitable values of m would be (i), for smooth plates with $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$, $m = 0.875$; (ii), for smooth plates with $2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8$, $m = 0.898$; (iii), for rough plates, $m = 0.880$.

These various types of data are all satisfied reasonably well by the value $m = 0.875$. Accordingly, we adopt $m = 7/8$ in the developments which follow. Additional data may lead to some change in the value of m , but this is unlikely to affect the general nature of the results to be obtained here.

Difficulties may arise when rough and smooth regimes co-exist along the one (uniformly rough) plate. However, since the thickness of the laminar sub-layer varies only slowly with x (approximately as $x^{0.1}$, cf. previous footnote), this will occur in practice only exceptionally.

5. The Reduced Wall Shear, $\tau_{*,0}$

With m now fixed, we may relate $\tau_{*,0}$ to the experimental data. The relationships we develop in this section are in no sense final, but indicate the order of magnitude of $\tau_{*,0}$ and give an overall picture of its mode of variation on smooth and rough plates. The subsequent developments do not depend on this section in any way.

(a) *Smooth Plates*

We require to fit the available data on c'_f to a relationship of the form

$$\tau'_f = A x^{-0.20}. \quad (5.1)$$

In the range $2.5 \times 10^5 < R < 10^7$, the data ([6], p. 439) are very well fitted by the value $A = 0.074 (\nu/U)^{0.20}$. When the range is extended to

$$2.5 \times 10^5 < R < 5 \times 10^8,$$

A requires to be increased to the value $0.077 (\nu/U)^{0.20}$. This value gives results deviating from experiment by a maximum of about 10%, an accuracy sufficient for our present purpose. Now, it follows from equations (3.4) and (5.1) that $A = 2 \tau_{*,0}$, so that

$$\tau_{*,0} = 0.0385 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{0.20}. \quad (5.2)$$

This is the relationship we provisionally adopt to specify $\tau_{*,0}$ over smooth plates.

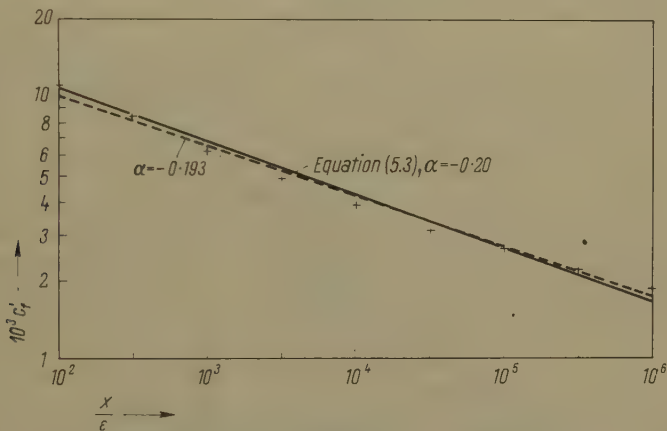


Figure 2

SCHLICHTING's interpolation formula (4.1), and power law approximations to it. Crosses represent points computed from equation (4.1).

(b) *Rough Plates*

Here we shall make use of SCHLICHTING's interpolation formula (4.1). In Figure 2 the function $(2.87 + 1.58 \log x/\epsilon)^{-2.5}$ is plotted against x/ϵ for the range $10^2 < x/\epsilon < 10^6$. It is evident that we can replace this function to a good approximation by one of the form $B(x/\epsilon)^\alpha$. The best fit, for $\alpha = -0.193$, is shown on the figure, but it is more convenient for our present purpose to

adopt $\alpha = -0.20$, giving $B = 0.0264$. This line is also shown, and is seen to correspond quite closely to SCHLICHTING'S function. We therefore rewrite (4.1) as

$$c'_i = 0.0264 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)^{-0.20}. \quad (5.3)$$

Use of equation (3.4) then reduces this to

$$\tau_{*,0} = 0.0132 \varepsilon^{0.20} \quad (5.4)$$

which we adopt as the provisional relationship specifying $\tau_{*,0}$ over rough plates.

(c) Transition from Smooth to Rough

According to [6] (Figure 21.10, p. 449), the transition from smooth to rough over flat plates is marked by a much less definite depression of the drag coefficient than is the case for pipes. The point of departure from the smooth regime may therefore be found approximately by equating values of $\tau_{*,0}$ obtained from both equations (5.2) and (5.4), giving

$$\frac{U \varepsilon}{\nu} = 200, \quad (5.5)$$

in fair agreement with SCHLICHTING'S ([6], p. 454) approximate criterion for

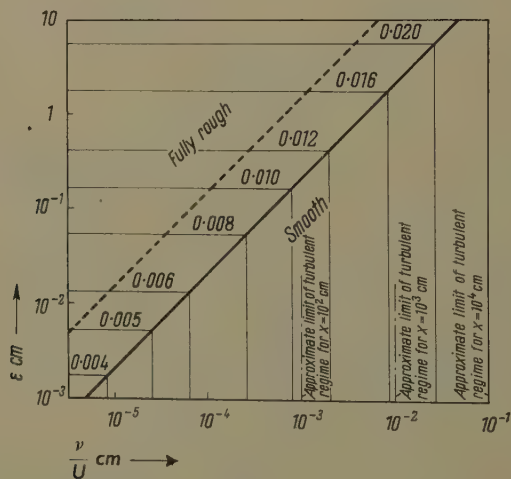


Figure 3

Variation of $\tau_{*,0}$ with ν/U and ε , as given by equations (5.2) and (5.4). The fine lines are 'contours' of $\tau_{*,0}$, and are labelled with the appropriate values of $\tau_{*,0}$. The diagonal broken line indicates approximate lower limit of completely rough regime. Approximate limit of (smooth) turbulent regime is shown for three values of x . To right of these three limits regime would be laminar. This figure is partly schematic and is intended primarily for illustrative purposes.

'admissible roughness',

$$\frac{U \varepsilon}{\nu} = 100. \quad (5.6)$$

The dependence of $\tau_{*,0}$ on ν/U in the smooth regime and on ε in the rough regime, as predicted by equations (5.2) and (5.4), is shown in Figure 3. The dotted limit of 'complete roughness' corresponds to $U \varepsilon / \nu = 1500$, in rough agreement with [6] (Figure 21.10, p. 449). Note that the region corresponding to large values of ν/U is turbulent only when y_δ (and therefore x) assumes very large values. A suitable criterion (for smooth surfaces) is that for $x < 10^5 \nu/U$ the flow is laminar (reference [6], p. 330).

6. The k -Function

Rearranging equation (3.2)

$$k = \frac{\left[\int_z^1 \left(\eta \chi - \int_0^z \eta d\chi \right) d\chi \right]^{1/2}}{(3 - 2m)^{1/2} \eta^m \frac{d\chi}{d\eta}}. \quad (6.1)$$

It follows that experimental data on the velocity profiles over flat plates (zero pressure gradient), which reduce to a relationship between η and χ for each profile, can be used to deduce the k -function.

The term $\int_0^z \eta d\chi$ proves to be of order of magnitude 10% of $\eta \chi$. It may be replaced for present purposes by $(1 - \beta) \eta \chi$, where β is taken as constant⁵⁾. We adopt the value $\beta = 0.88$, appropriate to boundary layers characterized by $\tau_{*,0}$ values about 0.005. Then $m = 7/8$, $\beta = 0.88$, lead to the following equations, which are modified forms of equations (3.2), (3.6) and (6.1), respectively:

$$0.704 \int_z^1 \eta \chi d\chi = \left(k \eta^{7/8} \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2, \quad (6.2)$$

⁵⁾ This 'β-approximation' introduces the possibility of two distinct types of error. The first is that resulting from taking β constant for any fixed value of $\tau_{*,0}$. Check computations comparing velocity profiles (i) calculated with constant β and (ii) using the 'exact' equations indicate that errors of this type are negligibly small for present purposes.

The second type of error, namely that arising from adopting the same value of β for all values of $\tau_{*,0}$ raises more complicated issues, but again the errors appear to be unimportant in the present context. Strictly, β tends to decrease slowly as $\tau_{*,0}$ increases.

Note that χ and τ/τ_0 profiles (cf. Figures 5 and 7), computed for a given $\eta\delta$, are independent of the value of β adopted. However, matters such as the relative magnitudes of $\eta \chi$ and $\int_0^z \eta d\chi$ in

any particular boundary layer will be studied most reliably by retaining the exact equations. It would have been possible to proceed with the exact equations; but the small improvement in accuracy would not seem to justify the great increase in the labor of computation.

$$\tau_{*,0} = 0.704 \int_0^1 \eta \chi d\chi, \quad (6.3)$$

$$k = 0.839 \frac{\left(\int_0^1 \eta \chi d\chi \right)^{1/2}}{\eta^{7/8} \frac{d\chi}{d\eta}}. \quad (6.4)$$

Since $d\chi/d\eta$ enters equation (6.4), the notoriously inaccurate process of differentiating experimentally determined functions must be carried out in evaluating k . This appears to set the limit to the accuracy with which k can be found. There is also some imprecision in the values of η_δ ; this tends, in particular, to make determinations of k uncertain in outer parts of the boundary layer.

Values of k as a function of η/η_δ , computed from (6.4) for various experimental data, are shown in Figure 4. We discuss these data, and the $k(\eta/\eta_\delta)$ function we adopt from them, in the following paragraphs.

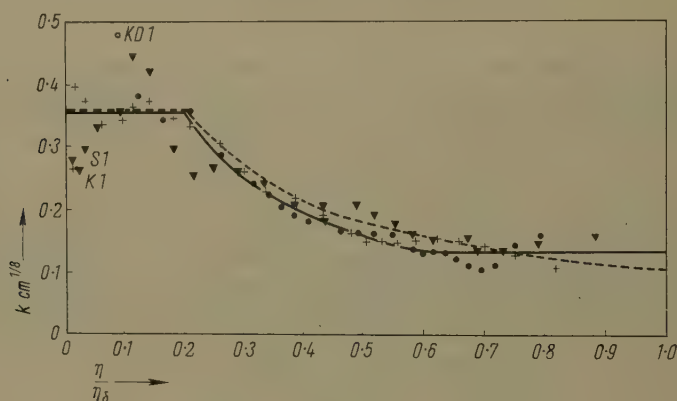


Figure 4

Mixing length function $k(\eta/\eta_\delta)$, computed for $m = 7/8$ from experimental data. Points K1, S1 represent outer limit of influence of laminar sub-layers. Point KD1 represents outer limit of influence of smooth surface (see text). Solid curve represents k -function (6.5), adopted in the subsequent computations. Broken curve represents k -function (6.6). + KLEBANOFF [8]; ∇ SCHULTZ-GRUNOW [3]; \bullet KLEBANOFF and DIEHL [9].

(a) Data of Klebanoff

KLEBANOFF [8] measured the velocity profile across an artificially thickened boundary layer in a wind tunnel specially constructed to give a low turbulence level (about 0.03%). In view of the care of the measurements, and the (relative) accuracy with which the present author could differentiate the fairly large-

scale plot of the velocity profile, these data (with those of KLEBANOFF and DIEHL [3]) must be regarded as the most reliable for our present purpose.

KLEBANOFF deduces $c'_t = 0.00283$ from his measurements of turbulent intensity close to the wall; this corresponds to $\tau_{*,0} = 0.00476 \text{ cm}^{1/5}$. The value of $\tau_{*,0}$ obtained directly from the velocity profile by evaluation of $\int_0^1 \eta \chi d\chi$ [i. e., using equation (6.3)] is $0.00481 \text{ cm}^{1/5}$. Such good agreement between $\tau_{*,0}$ values found by the two independent methods, encourages us to pursue the implications of the present formulation. For these data, $\eta_\delta = 0.0616 \text{ cm}^{1/5}$.

The point labelled K1 on Figure 4 ($\eta/\eta_\delta = 0.011$) appears to mark the outer limit of the influence of the laminar sub-layer on the Klebanoff profile. k decreases as the sub-layer is approached, and is about 0.1 in most of the sub-layer.

(b) Data of Schultz-Grunow

SCHULTZ-GRUNOW [3] gives data for a number of stations along a turbulent boundary layer on a flat plate (zero pressure gradient). The velocity profiles exhibit similarity to a fair accuracy, and, for simplicity, we here use only the data for the station at 530 cm. Regrettably, SCHULTZ-GRUNOW's data are presented in small diagrams, and the present author does not regard the deduced values of k , shown in Figure 4, as having the reliability of the other plotted data.

SCHULTZ-GRUNOW measured the drag by means of a floating element mounted in the plate. It may be inferred from his data that c'_t at 530 cm was 0.0254, which leads to $\tau_{*,0} = 0.00445 \text{ cm}^{1/5}$. Determination of $\tau_{*,0}$ from the velocity profile *via* equation (6.4) gives $0.00444 \text{ cm}^{1/5}$. Again the two independently determined values of $\tau_{*,0}$ agree very well. For these data, $\eta_\delta = 0.0557 \text{ cm}^{1/5}$.

The two points on Figure 4 indicated by S1 appear to represent the outer limit of the influence of the laminar sub-layer for this profile.

(c) Data of Klebanoff and Diehl

To test the $k(\eta/\eta_\delta)$ relationship discernible in the Klebanoff and the Schultz-Grunow data, it was desirable to evaluate k for a surface exhibiting somewhat larger values of $\tau_{*,0}$ and η_δ . One point to be resolved by such a test was whether k should be treated as a 'universal' function of η/η_δ or of η . The previous analytical results follow equally well if k were taken as a function of η rather than of η/η_δ . Also, for such data to be reasonably homogeneous with the Klebanoff and the Schultz-Grunow data, it was desirable that the turbulence level of the free stream be small.

Data available in the work of KLEBANOFF AND DIEHL [9] satisfy both conditions quite well. Their work was carried out in the same tunnel as that of

KLEBANOFF, and the data to be used here gave a value of η_δ about twice those of the previous data.

KLEBANOFF and DIEHL covered the leading two feet of the test plate with No. 16 sand paper, so as to artificially thicken the boundary layer, which would be studied in detail sufficiently downstream for the layer to have resumed equilibrium characteristics. Our interest here is in the velocity profiles at a station 0.08 ft downstream of the roughened surface. The boundary layer over the roughened surface was apparently turbulent right from the leading edge, and this 2.08 ft profile can be considered characteristic of the roughened surface (and in equilibrium with profiles over the roughened surface), except in a surface layer of thickness of order 0.1 in.

KLEBANOFF and DIEHL give data for free stream velocities of 35, 55 and 108 ft/s. All profiles agree closely, and here we have used a mean curve through the three sets of data. On the present interpretation of these data, $\eta_\delta = 0.105$ and $\tau_{*,0} = 0.0134$. The point labelled *KD1* appears to lie at the inner limit of validity of the assumption that the profile is in equilibrium with the rough surface. Note that points within the region of influence of the smooth surface would give abnormally high values of k , if they were treated as homogeneous with the outer part of the profile.

It is seen that the data of KLEBANOFF and DIEHL lead to a $k(\eta/\eta_\delta)$ function which does not differ significantly from that suggested by the data of KLEBANOFF and SCHULTZ-GRUNOW. It also appears that our assumption that k varies with (η/η_δ) , rather than with η , is justified.

(d) *The Adopted k -Function*

Clearly, k is about 0.36 in a region close to the wall, and decreases monotonically to about 0.14 in the outer parts of the boundary layer. The data are scarcely adequate for us to go beyond this. However, to explore numerical solutions of the boundary layer equations, we need to specify k in precise form. On the basis of the experimental data, the following k -function (for low free-stream turbulence) appears appropriate, and is used subsequently in this work.

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 0.2, & k &= 0.358, \\ 0.2 &< \frac{\eta}{\eta_\delta} < 0.6, & k &= 0.0871 \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^{-7/8}, \\ 0.6 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 1, & k &= 0.1355. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

(6.5), which is shown as the full curve of Figure 4, is in a form chosen because it was convenient for the numerical work we require to perform in integrating equation (6.2). Certain inelegancies in (6.5) can be avoided in other

formulations, such as

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 0.2, \quad k = 0.36, \\ 0.2 &< \frac{\eta}{\eta_\delta} \leq 1, \quad k = 0.108 \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^{-3/4}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

which fits the data nearly as well. The broken curve of Figure 4 represents (6.6).

These forms are, of course, tentative. Note that the three and four significant figures of (6.5) are not to be taken seriously. Calculations were begun with a β -value which was later amended. The numerical values of (6.5) were needed so that these calculations could be retained.

7. Numerical Solutions of Equation (6.2)

The method of solution of equation (6.2) subject to conditions (3.10) and (6.3) is, essentially, to regard η_δ as a datum, and to proceed by stepwise integration from η_δ towards η_0 . Values of $\tau_{*,0}$ and η_0 emerge as part of the solution obtained. The method is similar to that used in integration of the concentration-dependent diffusion equation [10], in that the χ -intervals used in computing successive values of $\int_z^1 \eta \chi d\chi$ overlap those used in computing the decrements in η . Near $\chi = 1$, $\eta = \eta_\delta$, the integration is started analytically by means of the approximation

$$\int_z^1 \eta \chi d\chi = (\eta \eta_\delta)^{1/2} (1 - \chi), \quad (7.1)$$

which leads to equation (7.2) for $k = 0.1355$

$$\eta^{3/8} = \eta_\delta^{3/8} - 0.1211 \chi_\delta^{-1/4} (1 - \chi)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Solutions of equation (6.2) were obtained for the following values of η_δ : 0.05, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12. These give a range of values of $\tau_{*,0}$ which includes the available experimental data, and which can be expected to contain most cases of practical interest. The number of steps dividing the χ interval, 0 to 1, varied from 41 to 58.

The primary numerical results obtained consisted of the $\eta(\chi)$ functions, which are shown in Figure 5, and the set of values of

$$\int_z^1 \eta \chi d\chi,$$

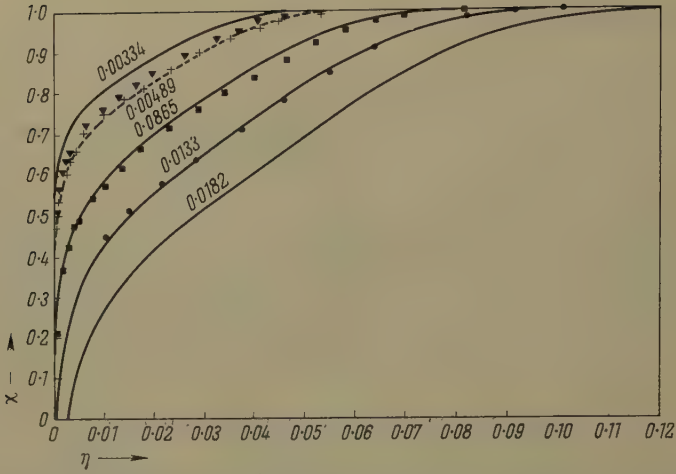


Figure 5

Experimental and computed velocity profiles in reduced form $\chi(\eta)$. Figures on computed curves denote appropriate values of $\tau_{*,0}$. ▼ SCHULTZ-GRUNOW [3]; + KLEBANOFF [8]; ■ CORRISIN and KISTLER [5]; ● KLEBANOFF and DIEHL [9].

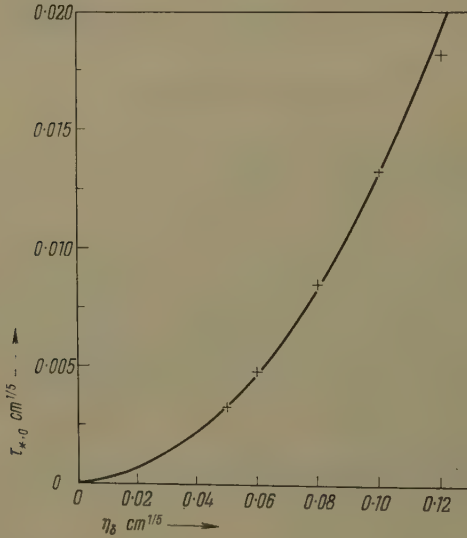


Figure 6

The relationship between $\tau_{*,0}$ and $\eta\delta$. Crosses denote computed points. Curve represents equation (8.1).

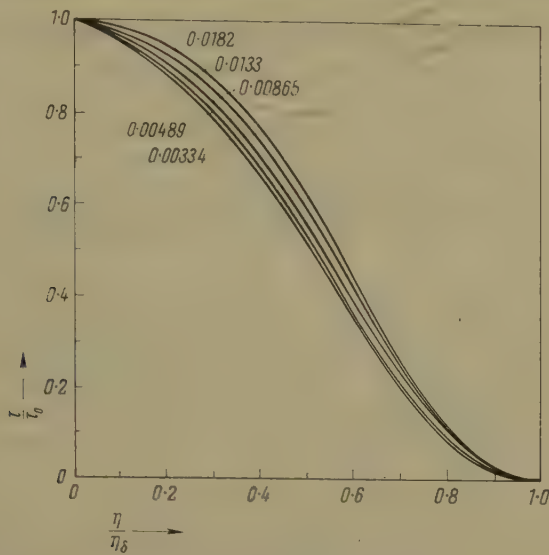


Figure 7
Computed shear stress profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

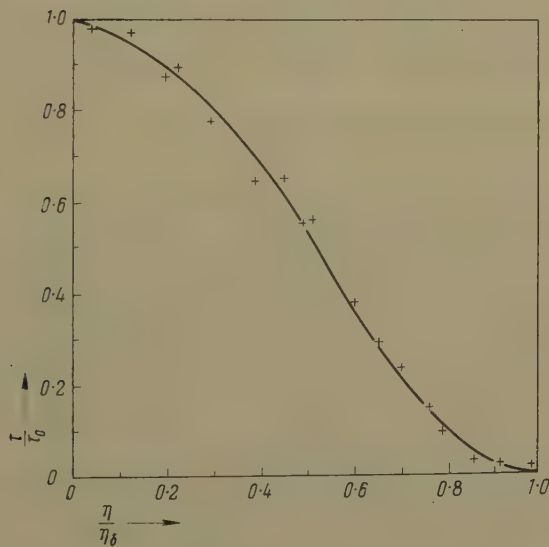


Figure 8
Computed shear stress profile for $\tau_{*,0} = 0.00489$, compared with experimental points for $\tau_{*,0} = 0.00476$. + KLEBANOFF [8].

which occur in the course of the computation. Also, from equations (3.5) and (6.2),

$$\tau_* = 0.704 \int_x^1 \eta \chi d\chi, \quad (7.3)$$

so that the profile of τ_* follows at once. Figure 6 shows the $\tau_{*,0}(\eta_\delta)$ relationship found in this way, and the various τ/τ_0 (or $\tau_*/\tau_{*,0}$) profiles are given in Figure 7.

8. The Various Properties of the Boundary Layer

Other boundary layer properties may be computed from these primary numerical results. The various properties of the layer, as computed, are presented and discussed briefly here.

(a) Shear Stress Profiles

The shear stress profiles (Figure 7) are all sigmoidal, but not identical. KLEBANOFF [8] measured the turbulent shearing stress in a boundary layer for which $\tau_{*,0}$ was 0.00476. Figure 8 compares his data with the computed profile for $\tau_{*,0} = 0.00489$; the γ_δ adopted for KLEBANOFF's data was 3.12 in. The agreement between analysis and experiment is seen to be fairly good, and is rather better than that obtained by CLAUSER's analysis ([11], Figure 16).

In Figure 6 the computed points are compared with the parabola passing through the point computed for $\eta_\delta = 0.08$, and representing the relationship

$$\tau_{*,0} = 1.352 \eta_\delta^2. \quad (9.1)$$

(b) Velocity Profiles

Figure 5 shows various experimental data, as well as the computed reduced velocity profiles. The profiles of KLEBANOFF and SCHULTZ-GRUNOW, used previously in establishing k , are given. The 55 ft/s profile of KLEBANOFF and DIEHL is shown, the other similar ones being omitted for clarity. Also shown is the profile of CORRSIN and KISTLER [5] at station 102" of their boundary layer along a rough corrugated surface. The agreement between observation and analysis is especially notable in the case of the Corrsin and Kistler data, since these did not enter into the establishment of k .

The computed profiles agree about as well as do observed profiles with the velocity profile 'laws' proposed from time to time.

(i) *Power law velocity profile.* Plots of $\log_{10} \chi$ against $\log_{10} \eta/\eta_\delta$ for each computed velocity profile show that an appreciable region of the layer might be supposed to obey a power law. The exponent increases practically linearly

with $\tau_{*,0}$ from 1/9.8 for the 'smoothest' profile to 1/1.7 for the 'roughest'. The exponent corresponding to much of the smooth plate work ($\tau_{*,0} \approx 0.0046$) is about 1/7.

(ii) *Velocity defect law.* Plots of $(U - u)/u_*$ against a reduced abscissa related to distance from the wall, such as y/y_δ , have been found [11–15] to give groupings of points which might suggest the existence of a 'universal' defect law holding in an outer region of turbulent boundary layers along both smooth and rough plates.

Such formulations seem to imply two different types of universality. These are, firstly, a universality embracing profiles occurring at different stations along the one boundary layer, and, secondly, an universality embracing profiles occurring on *different* boundary layers, i. e. on smooth plates characterized by different values of (ν/U) and on plates of various roughnesses.

Universality of the first type cannot be exactly consistent with the present formulation ($m \neq 1$), which implies similarity in velocity profiles along the one layer. (The data of SCHULTZ-GRUNOW [3] is, perhaps, the best available for comparing velocity profiles at a number of stations along a plate at zero incidence. Curiously enough, these data are often supposed to illustrate the velocity defect law. Yet it can be shown, at least as persuasively, that his profiles exhibit similarity to a good approximation.) Universality of the second type, however, can be examined further by means of the present approach. The corresponding plot here is of $(1 - \chi)/\tau_{*,0}^{1/2}$ against η/η_δ . In view of equation (8.1), we use here the equivalent, and more convenient, $(1 - \chi)/\eta_\delta$ against η/η_δ . Plots of the computed profiles are given to a linear scale in Figure 9, and with η/η_δ logarithmic in Figure 10.

Figure 9 should be compared with Figure 10.5 of [15] (p. 245). The spread of the experimental points in TOWNSEND'S figure is about as great as the deviations between computed curves for the appropriate $\tau_{*,0}$ values. Admittedly the x -values for the experimental data are not all equal, but they tend to be of the same order of magnitude. There are also factors tending to obscure the spread of points at equal x ; for example, the profiles for CORRSIN and KISTLER'S rough surface were at x -values very much less than those appropriate to the smooth surface data of SCHUBAUER and KLEBANOFF [16]. Similar remarks hold for Figure 10, which may be compared to Figure 10.4 of [15] (p. 244) and Figure 5 of [11].

(iii) *Logarithmic profiles and roughness effects.* Another interesting aspect of Figure 10 is that, at any fixed $\tau_{*,0}$, the velocity is a linear function of $\log \eta/\eta_\delta$ to a good approximation in the region $\eta < 0.2 \eta_\delta$. The present analysis thus connects with the proposal [11, 13, 15] that this part of the velocity profile is logarithmic.

Also, the various curves are roughly parallel in this 'logarithmic' region. This is at least consonant with the concept [12, 17] that roughness changes

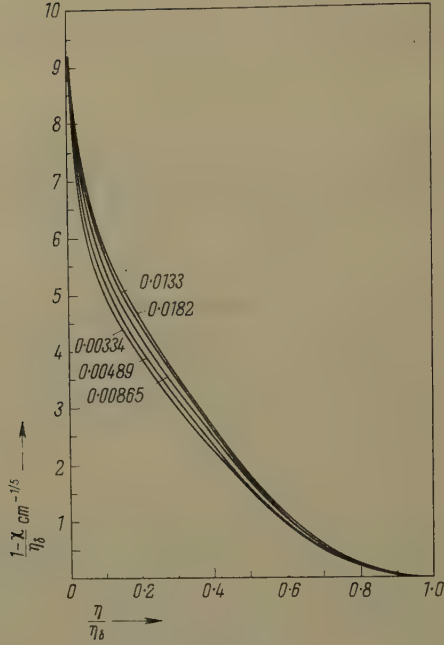


Figure 9

Velocity defect law, usual formulation. Linear plot of computed velocity profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

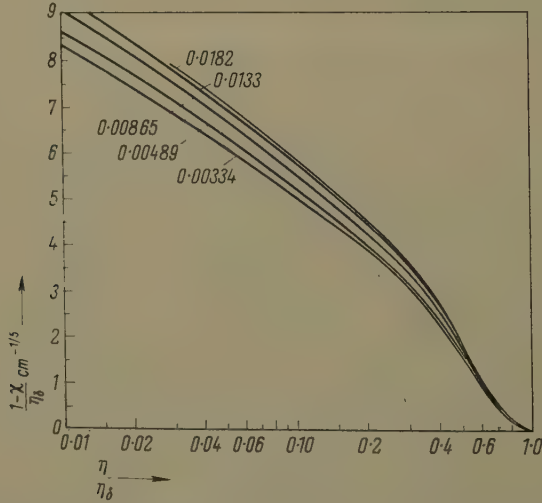


Figure 10

Velocity defect law, usual formulation. Logarithmic plot of computed velocity profiles for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

the velocity profile in the 'logarithmic' region by decreasing u/u_* by a constant amount.

(iv) *An alternative velocity defect law.* It is simply shown that use of approximation (7.1) in equation (6.2) leads to the result that velocity profiles may be put into the form

$$\frac{1-\chi}{\eta_\delta^{5/4}} = \text{function} \left(\frac{\eta}{\eta_\delta} \right). \quad (8.2)$$

Although agreement between plots of the various profiles depends solely on the efficiency of approximation (7.1), which is accurate only in outer parts of the layer, this form of defect law is found to work quite well through the whole depth of the layer.

A particular form of (8.2) appropriate to the outer part of the layer may be found by rearranging equation (7.2), using the binomial theorem, and neglecting terms in $(1 - \eta/\eta_\delta)$ of higher order than the first. The result is equation (8.3):

$$\frac{1-\chi}{\eta_\delta^{5/4}} = 9.59 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_\delta} \right)^2. \quad (8.3)$$

This is similar in form to HAMA'S [17] empirical square law for the outer part of the boundary layer. It supports HAMA'S second power rather than Ross's [18] $3/2$ power.

(c) Profiles of Eddy Viscosity

Equations (1.4), (1.5) and (2.1) yield

$$K = k^2 \eta^{2m} \frac{d\chi}{d\eta} U x^{(2m-1)/(3-2m)} \quad (8.4)$$

so that we may introduce a reduced eddy viscosity K_* by the relationships

$$K = K_* U x^{(2m-1)/(3-2m)}, \quad K_* = k^2 \eta^{2m} \frac{d\chi}{d\eta}. \quad (8.5)$$

It follows from equation (3.5) that

$$K_* = \frac{\tau_*}{\frac{d\chi}{d\eta}}, \quad (8.6)$$

which enables profiles of K_* to be computed simply. These are shown in Figure 11. They are fairly similar in shape, the scale of K_* being roughly proportional to $\tau_{*,0}$. Since k^2 enters the second of equations (8.5), one expects the discontinuities in the adopted k -function at $\eta/\eta_\delta = 0.2$ and 0.6 to be reflected in the K_* curves. The slight dip in the curves near $\eta/\eta_\delta = 0.6$ is explained in

this way, and it is likely that the peaks near $\eta/\eta_\delta = 0.2$ are rather too sharp for the same reason.

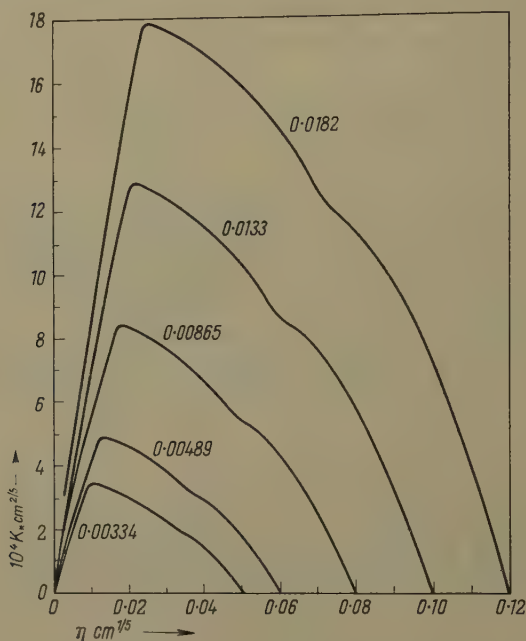


Figure 11

Profiles of eddy viscosity in reduced form $K_*(\eta)$, computed for the five values of $\tau_{*,0}$ shown.

(d) *Velocity Component Normal to the Plate*

Profiles of reduced velocity normal to the plate are simply computed, using equation (3.1). The profiles are found to be typically sigmoidal, but, as one would expect, are not exactly similar to each other.

(e) *Relation Between Roughness and Drag*

The numerical solutions also yield a relationship between η_0 and $\tau_{*,0}$. At the 'rough' end of the $\tau_{*,0}$ range, η_0 varies approximately as $\tau_{*,0}^5$. Taken with equation (5.4), this suggests the reasonable result that, for the rough regime, η_0 may be proportional to ε .

9. Free Stream Turbulence and Pipe Flow

The k -function adopted here is intended to apply to the case where the turbulence level in the free stream is small. As free stream turbulence increases

one would expect k to increase, particularly in the outer regions of the boundary layer. Turning to the question of turbulent flow in pipes, it may be reasonable to regard the pipe radius as the boundary layer thickness, and the equivalent 'free stream turbulence' as some representative level of turbulence along the opposite radius of the pipe. Thus the k -function for pipes might be expected to be rather like that for a boundary layer with a high level of free stream turbulence. This is, in fact, what is found for the mixing length data of NIKURADSE [19], when this is recast into the form $k(y/y_\delta) = l y^{-7/8}$.

10. Discussion

(a) *Universal Functions and Occam's Razor*

WILLIAM OF OCCAM pronounced, 'entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem'. Fluid mechanicians may translate: 'Universal functions must not be multiplied beyond necessity.' For each separate universal function, as used in fluid mechanics, is simply a separate hypothesis about the phenomenon.

In the present work, we have reduced description of the turbulent boundary layer, in all its gross particulars, to a single 'mixing-length' function⁶). The alternative formulations of CLAUSER, COLES and TOWNSEND apparently require one universal function to describe the outer velocity profile, and another to describe the inner velocity profile in the case of smooth surfaces (law of the wall). CLAUSER and HAMA have made some suggestions as to how to cope with the problem of the inner part of the velocity profile over rough surfaces, and this, in effect, involves yet a third hypothesis. The present formulation, with its single hypothesis, is relevant to both smooth and rough surfaces, and involves no problem of joining inner and outer profiles. Note, also, that no further universal function is required to generalize the present approach to the case of non-zero pressure gradient.

(b) *Downstream Variation of Drag and Layer Thickness*

A further aspect in which alternative formulations appear to be inadequate is in the manner in which they fail to take full cognizance of the downstream variation of local drag coefficient and boundary layer thickness. Thus in [11] (p. 18) a universal defect law is made the starting point of an analysis of the boundary layer. Immediately a difficulty arises because u_* varies with x , but, because the variation of u_* with x is relatively slow, the theory is developed on the basis of u_* constant, i. e. 'pipe-like' elements are introduced into the analysis at the outset.

⁶) We do not, of course, pretend to give an adequate description of the laminar sub-layer, where it exists. However, this seems a small price to pay for the advantages of the present formulation.

Another form of this tendency to treat boundary layers as pipes is inadequate recognition of the loss of momentum suffered by each parcel of fluid during its passage along a thickening boundary layer. The terms on the left hand side of equation (1.2) relate to the rate of this loss of momentum, and clearly form a most important element in this equation. They do not, of course arise in pipe flow.

It is quite obvious that these terms are greatly affected by the rate of growth of boundary layer thickness, and it follows that the profiles of velocity and shear stress will be quite different if, say, $y_\delta \propto x^{0.5}$ instead of $y_\delta \propto x^{0.8}$.

CLAUSER [11] attempts to represent the outer regions of constant pressure layers by velocity profiles of laminar boundary layers with various non-zero velocities at the wall. He wishes to reproduce the effect of constant eddy viscosity in the regions, but his results are appropriate to a layer growing in thickness as $x^{0.5}$, and having momentum loss characteristics of a laminar and not a turbulent layer. His conclusion that the viscosity in the outer 80% to 90% of the layer is constant and proportional to the product of U and the displacement thickness (i. e. to $U x^{0.8}$, with $m = 7/8$) is, therefore, not valid. The present analysis predicts $K \propto U x^{0.6}$ and gives profiles of K rather more in keeping with experimental data [4].

(c) *Physical Implications*

The physical implications of this work will be explored further in a proposed second paper giving the extension to non-zero pressure gradient. Here it suffices to state that the momentum considerations introduced in equation (1.2), together with the adopted mixing-length hypothesis, are capable of predicting and connecting the gross characteristics of the turbulent boundary layer.

Objections to the mixing length approach, such as those of TOWNSEND [4], have substance, of course, and are a useful corrective to a literal belief in the physical existence of the simple mixing-length model. Yet, although the model cannot be exact, it is an approximation to mixing processes which do take place, and it is not unreasonable to expect that a mixing-length function might be found which describes gross features of the motion to a fair enough accuracy. This is apparently what we have done here.

The full scope of the present approach has not yet been explored. Apart from extension to non-zero pressure gradients (which shows, *inter alia*, that the k -function used here leads to results in agreement with observation of turbulent layers in positive and negative pressure gradients, including layers at separation), there remains the question of flows in pipes and closed and open conduits. There is some evidence that the approach may prove valid in this somewhat wider context.

REFERENCES

- [1] L. PRANDTL, Verh. 3. Int. Math.-Kongr., Heidelberg, 484 (1904).
- [2] L. PRANDTL, Z. angew. Math. Mech. 5, 136 (1925).
- [3] F. SCHULTZ-GRUNOW, Luftfahrtforschung 17, 239 (1940).
- [4] A. A. TOWNSEND, Proc. Camb. phil. Soc. 47, 375 (1951).
- [5] S. CORRSIN and A. L. KISTLER, NACA TN 3133 (1954).
- [6] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1955).
- [7] S. GOLDSTEIN, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 2 (Clarendon Press, 1938).
- [8] P. S. KLEBANOFF, NACA TN 3178 (1954).
- [9] P. S. KLEBANOFF and Z. W. DIEHL, NACA Report 1110 (1952).
- [10] J. R. PHILIP, Trans. Faraday Soc. 51, 885 (1955).
- [11] F. H. CLAUSER, Advanc. appl. Mech. 4, 1 (1956).
- [12] F. H. CLAUSER, J. aeron. Sci. 21, 91 (1954).
- [13] D. COLES, Z. angew. Math. Phys. 5, 181 (1954).
- [14] D. COLES, J. Fluid Mech. 1, 191 (1956).
- [15] A. A. TOWNSEND, *The Structure of Turbulent Shear Flow* (Cambridge University Press, 1956).
- [16] G. B. SCHUBAUER and P. S. KLEBANOFF, NACA TN 2133 (1950).
- [17] F. R. HAMA, Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Engrs. 62, 333 (1954).
- [18] D. ROSS, Amer. Soc. Civ. Eng. Proc., Sep. No. 604 (1955).
- [19] J. NIKURADSE, VDI-Forschungsheft, 361 (1933).

Zusammenfassung

Das hier entwickelte, formale, mathematische System beschreibt turbulente Grenzschichten an glatten und rauhen Platten und vermittelt eine zusammenhängende und folgerichtige Behandlung von solch groben Schichteigenschaften wie Durchschnittsgeschwindigkeitsprofil, Schubspannung, Wirbelviskosität und Grenzschichtdicke. Die erhaltenen Lösungen zeigen gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die gegebene Formulierung kann in gewisser Hinsicht als eine neuartige Mischungsweghypothese betrachtet werden.

Die Arbeit beschränkt sich auf Grenzschichten mit Nulldruckgradienten. Eine Verallgemeinerung auf von Null abweichende Druckgradienten ist einer späteren Mitteilung vorbehalten, in welcher gezeigt werden soll, dass die benutzte Methode zu mit dem Experiment übereinstimmenden Ergebnisse führt und keiner weiteren Hilfhypothesen bedarf.

Die physikalische Bedeutung der Arbeit kann darin gesehen werden, dass ein allerdings nicht ganz genaues Mischungswegmodell dennoch auftretende Mischungsvorgänge näherungsweise beschreiben kann, was somit die Aufstellung einer Mischungsweghypothese ermöglicht, die mit genügender Genauigkeit ein grobes Bild verschiedener Aspekte der beobachteten Vorgänge gibt. Es ist somit möglich, zu einer handlichen und folgerichtigen mathematischen Formulierung zu gelangen, mit deren Hilfe allgemeine Eigenschaften von turbulenten Grenzschichten an festen Oberflächen untersucht werden können.

(Received: Dezember 8, 1958.)

Resistance on a Circular Cylinder Due to any Number of Vortices Lying in two Rows

By Miss DURGA ROY, Calcutta, India¹⁾

Introduction

Consider a circular cylinder in a uniform flow with a wake of vortices. The purpose of this paper is to calculate the resistance experienced by the cylinder.

First, a general formula is obtained with no assumptions about the vortices, except that half of them are of strength k , and half of strength $-k$; the result is contained in equations (11) and (16), under the further assumption that the vortices lie symmetrically in two lines parallel to the uniform flow. The formula for the resistance is made more explicit in the double series shown in (20) and (21).

The present work differs from what has been done previously in the fact that it yields an exact expression for the instantaneous resistance, instead of merely a time-average. This is, however, achieved only by limiting attention to the case of a circular cylinder. With reference to calculations of the time-average, the usual treatment [2]²⁾ involves the replacement of a semi-infinite wake by a fictitious wake extending to infinity in both directions, but this procedure may be avoided [1].

Description of the Present Work

Where there are two rows of vortex filaments, in one of which each filament is of vorticity $+k$ and in the other of vorticity $-k$, placed symmetrically to one another; and where a cylinder of radius C has been introduced with its centre at the point of origin in a uniform flow along the x -axis, the complex potential is found with the help of the circle theorem and is given by

$$W = -U \left(z + \frac{c^2}{z} \right) + \frac{i k}{2 \pi} \times \left[\sum \log(z - z_m) - \sum \log(z - \bar{z}_{p'}) - \sum \log\left(\frac{c^2}{z} - \bar{z}_m\right) + \sum \log\left(\frac{c^2}{z} - z_{p'}\right) \right],$$

¹⁾ Now at the School of Theoretical Physics, Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Ireland.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 508.

where

$$z_m = x_m + i y_m \quad \text{and} \quad \bar{z}_{p'} = x_{p'} - i y_{p'}.$$

W can be written as

$$W = -U \left(z + \frac{c^2}{z} \right) + \frac{i k}{2 \pi} \times \sum \left[\log(z - z_m) - \log(z - \bar{z}_p) - \log\left(z - \frac{c^2}{\bar{z}_m}\right) + \log\left(z - \frac{c^2}{z_{p'}}\right) + \log \frac{z_{p'}}{\bar{z}_m} \right]. \quad (1)$$

If X, Y denote the components of thrust acting on the cylinder along the axes x and y then,

$$X - i Y = -i \oint_c p \, d\bar{z}, \quad (2)$$

where integration is along the boundary of the circle $z \bar{z} = c^2$, where c is the radius of the cylinder.

The pressure p is obtained from BERNOULLI'S equation

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} q^2 + F(t), \quad (3)$$

where q^2 is the square of the velocity, φ the velocity potential and $\vec{q} = -\nabla \varphi$.

To evaluate $F(t)$ we see that at infinity $p = \text{const} = \Pi$ say,

$$q = U \quad \text{and} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for all } t.$$

Therefore (3) becomes

$$p = \Pi - \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4)$$

Now,

$$q^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right), \quad 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \quad (5)$$

Substituting the value of p from (4) with the help of (5), equation (2) becomes

$$X - i Y = \frac{1}{2} i \rho \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz - i \rho \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) dz \quad (6)$$

giving the components of the total force on the cylinder. The result (6) is obviously an extension of the Blasius result for the steady case.

In (6) we put

$$X_1 - i Y_1 = \frac{1}{2} i \varrho \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \quad (6a)$$

and

$$X_2 - i Y_2 = -i \varrho \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) dz. \quad (6b)$$

Therefore

$$X - i Y = (X_1 - i Y_1) + (X_2 - i Y_2). \quad (6c)$$

It is easy to identify $X_1 - i Y_1$ as the complex thrust on the cylinder due to two rows of vortices when the vortices are stationary.

On the other hand, $X_2 - i Y_2$ is the contribution to the complex-thrust from the unsteady character of the flow created by the movement of the vortices.

From (1) we get

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum \frac{1}{z - z_m} - \sum \frac{1}{z - \bar{z}_{p'}} - \sum \frac{1}{z - \bar{\alpha}_m} + \sum \frac{1}{z - \alpha_{p'}} \right],$$

where

$$\bar{\alpha}_m = \frac{c^2}{\bar{z}_m} \quad \text{and} \quad \alpha_{p'} = \frac{c^2}{z_{p'}}. \quad (7)$$

With the help of (7) equation (6a) becomes

$$X_1 - i Y_1 = \frac{\varrho k^2}{2 \pi} \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{z_m - \bar{\alpha}_n} - \frac{1}{\bar{z}_m - \alpha_{p'}} - \frac{1}{\bar{z}_{p'} - \bar{\alpha}_m} + \frac{1}{\bar{z}_{p'} - \alpha_{q'}} \right] + i \varrho K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_{p'}^2} \right), \quad (8)$$

where m, n denote the vortices on the upper row and p', q' on the lower row.

Simplifying (8) finally we get

$$X_1 - i Y_1 = \frac{\varrho k^2}{2 \pi} \left[\sum_m \sum_n \frac{\bar{z}_m z_{p'} (z_m + \bar{z}_{p'}) - c^2 (\bar{z}_m + z_{p'})}{(z_m z_{p'} - c^2) (\bar{z}_m \bar{z}_{p'} - c^2)} + \sum_m \sum_n \frac{c^2 (\bar{z}_m + \bar{z}_n) - \bar{z}_m \bar{z}_n (z_m + z_n)}{(z_m \bar{z}_n - c^2) (\bar{z}_m z_n - c^2)} + \sum_m \sum_n \frac{c^2 (z_{p'} + z_{q'}) - z_{p'} z_{q'} (\bar{z}_{p'} + \bar{z}_{q'})}{(z_{p'} z_{q'} - c^2) (\bar{z}_{p'} \bar{z}_{q'} - c^2)} + \sum_m \frac{\bar{z}_m}{z_m \bar{z}_m - c^2} + \sum_{p'} \frac{z_{p'}}{z_{p'} \bar{z}_{p'} - c^2} \right] + i \varrho K U C^2 \left(\sum_m \frac{1}{z_m^2} - \sum_{p'} \frac{1}{\bar{z}_{p'}^2} \right). \quad (9)$$

If the vortices on the upper and lower row move symmetrically, then (8) can be written as

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{\varrho k^2}{2\pi} \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{z_m - \bar{\alpha}_n} - \frac{1}{z_m - \alpha_n} - \frac{1}{z_m - \bar{\alpha}_n} + \frac{1}{z_m - \alpha_n} \right] \\ &\quad + i \varrho K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right) \\ &= \frac{\varrho k^2}{2\pi} \sum_m \sum_n \left[\{(z_m + z_m) - (\alpha_n + \bar{\alpha}_n)\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{1}{(z_m - \bar{\alpha}_n)(\bar{z}_m - \alpha_n)} - \frac{1}{(z_m - \alpha_n)(\bar{z}_m - \bar{\alpha}_n)} \right\} \right] \\ &\quad + i \varrho K U C^2 \left(\sum \frac{1}{z_m^2} - \sum \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

As the vortices are symmetric in (10), replacing m by n in the first exponent of (10), adding and dividing by 2, and simplifying, we get

$$\left. \begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{\varrho k^2}{4\pi} \sum_m \sum_n \frac{\varrho k^2}{4\pi} \\ &\quad \times \sum \sum \left[\{(z_m + \bar{z}_m)(z_n \bar{z}_n - c^2) + (z_n + \bar{z}_n)(z_m \bar{z}_m - c^2)\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{1}{(z_m \bar{z}_n - c^2)(\bar{z}_m z_n - c^2)} - \frac{1}{(z_m z_n - c^2)(\bar{z}_m \bar{z}_n - c^2)} \right\} \right] \\ &\quad + i \varrho K U C^2 \sum \left(\frac{1}{z_m^2} - \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

From (1) again, with the help of the boundary condition we get

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{i k}{2\pi} \left[\sum \frac{\dot{z}_m}{z - z_m} + \sum \frac{\dot{\bar{z}}_{p'}}{z - \bar{z}_{p'}} + \sum \frac{\dot{z}_m}{\bar{z} - \bar{z}_m} - \sum \frac{\dot{\bar{z}}_{p'}}{\bar{z} - \bar{z}_{p'}} \right] = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \quad (12)$$

From (12)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right) \quad (13)$$

and from (6b) and (13) we get

$$X_2 - i Y_2 = -i \varrho \int_c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) dz. \quad (14)$$

Eliminating \bar{z} from the above integral (14) with the help of $z \bar{z} = c^2$ we get

$$X_2 - i Y_2 = -i K \varrho C^2 \left(\sum \frac{\dot{z}_m}{z_m^2} - \sum \frac{\dot{\bar{z}}_{p'}}{\bar{z}_{p'}^2} \right). \quad (15)$$

Adding (9) and (15) we finally get $X - i Y$.

In the case when the vortices move symmetrically then (15) becomes

$$X_2 - i Y_2 = i k \varrho c^2 \left(\sum \frac{\dot{z}_m}{z_m^2} - \sum \frac{\dot{\bar{z}}_m}{\bar{z}_m^2} \right). \quad (16)$$

Summing (16) and (11) we finally get $X - i Y$.

In order to find out the velocities of the vortices we take the classical velocity which is given by

$$-\frac{\partial w_1}{\partial z} \Big|_{z=z_m} = u_m - i v_m = \dot{x}_m - i \dot{y}_m = \dot{\bar{z}}_m, \quad (17)$$

where

$$w_1 = w - \frac{i k}{2 \pi} \log (z - z_m).$$

From (1), when the vortices move symmetrically, with the help of (17) we get

$$\dot{\bar{z}}_m = -\frac{i k}{2 \pi} \left[\sum_{m \neq n} \frac{1}{z_m - z_n} - \sum_n \frac{1}{z_m - \bar{z}_n} + \sum_n \frac{\bar{z}_n}{c^2 - z_m \bar{z}_n} - \sum_n \frac{z_n}{c^2 - z_m z_n} \right] + U \left(1 - \frac{c^2}{z_m^2} \right)$$

and

$$\dot{z}_m = \frac{i k}{2 \pi} \left[\sum_n^{\neq} \frac{1}{z_m - \bar{z}_n} + \sum_n \frac{z_n}{c^2 - \bar{z}_m z_n} + \sum \frac{z_n}{c^2 - \bar{z}_m z_n} - \sum \frac{\bar{z}_n}{c^2 - z_m \bar{z}_n} \right] + U \left(1 - \frac{c^2}{\bar{z}_m^2} \right). \quad (18)$$

Therefore with the help of (15) and (18)

$$\begin{aligned} X_2 - i Y_2 = \frac{\varrho k^2 c^2}{2 \pi} & \left[\sum_m \sum_n^{\neq} \frac{z_m \bar{z}_m (z_m + \bar{z}_m) - (z_n \bar{z}_n^2 + \bar{z}_n z_m^2)}{(z_m - z_n) (\bar{z}_m - \bar{z}_n) z_m^2 \bar{z}_m^2} \right. \\ & - \sum_m \sum_n \frac{z_m \bar{z}_m (z_m + \bar{z}_m) - (z_n z_m^2 + \bar{z}_n \bar{z}_m^2)}{(\bar{z}_m - z_n) (z_m - \bar{z}_n) z_m^2 \bar{z}_m^2} \\ & + \sum_m \sum_n \frac{c^2 (\bar{z}_m^2 z_n + z_m^2 \bar{z}_n) - z_m \bar{z}_m z_n \bar{z}_n (z_m + \bar{z}_m)}{z_m^2 \bar{z}_m^2 (c^2 - z_m \bar{z}_n) (c^2 - \bar{z}_m z_n)} \\ & \left. - \sum_m \sum_n \frac{c^2 (\bar{z}_m^2 \bar{z}_n + z_n z_m^2) - z_m \bar{z}_m z_n \bar{z}_n (z_m + \bar{z}_m)}{z_m^2 \bar{z}_m^2 (c^2 - z_m z_n) (c^2 - \bar{z}_m \bar{z}_n)} \right] \\ & - i K \varrho U C^2 \sum_m \left(\frac{1}{z_m^2} - \frac{1}{\bar{z}_m^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Then finally $X - i Y$ is obtained by summing (11) and (19).

Now if the vortices be arranged in such a way that

$$z_m = m a + \frac{1}{2} i b \quad \text{and} \quad \bar{z}_n = n a - \frac{1}{2} i b,$$

then substituting this value expression (11) becomes

$$\begin{aligned} X_1 - i Y_1 &= \frac{\rho k^2}{2\pi} \\ &\times \sum_m \sum_n \left\{ \frac{(m+n)(mn a^2 + \beta)}{(mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2} \left\{ (mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2 + b^2 c^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \rho K U C^2 a b \sum \frac{m}{(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

The expression (2) is convergent, as

$$\begin{aligned} &\sum_m \sum_n \frac{(m+n)(mn a^2 + \beta)}{\left\{ (mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2 \right\} \left\{ (mn a^2 + \beta)^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 (n-m)^2 + b^2 c^2 \right\}} \\ &< \sum_m \sum_n \frac{(m+n)}{(mn a^2 + \beta)^3} < \sum_m \sum_n \frac{m+n}{m^3 n^3 a^6} < \sum_m \sum_n \frac{m+n}{m^3 n^3}, \\ \text{i. e. } &< \sum_m \sum_n \left(\frac{1}{m^2 n^3} + \frac{1}{m^3 n^2} \right). \end{aligned}$$

But both the series

$$\sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^3} \quad \text{and} \quad \sum_m \sum_n \frac{1}{m^3 n^2}$$

are convergent; again, as the series

$$\sum_m \frac{1}{m^3}$$

is convergent the U depending series in $X_1 - i Y_1$ is also convergent and therefore $X_1 - i Y_1$ is convergent, when m and n both take an infinite number of values.

Taking the values z_m, z_n etc., expression (19) becomes

$$\begin{aligned} X_2 - i Y_2 &= -\frac{\rho k^2 c^2}{2\pi} \\ &\times \left[\sum_m \sum_n^{m \neq n} \frac{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right) 2 m a - \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2 \right) 2 n a - m a b^2}{(m-n)^2 a^2 \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_m \sum_n \frac{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a - \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) 2 n a + m a b^2}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \{(m-n)^2 a^2 + b^2\}} \\
& + \sum_m \sum_n \frac{c^2 \left\{ 2 n a \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) + m a b^2 \right\} - \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \left\{ c^4 + \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) - 2 c^2 \left(m n a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \right\}} \\
& - \sum_m \sum_n \frac{c^2 \left\{ 2 n a \left(m^2 a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) - m a b^2 \right\} - \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) 2 m a}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2 \left\{ c^4 + \left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) \left(n^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right) - 2 c^2 \left(m n a^2 - \frac{1}{4} b^2\right) \right\}} \\
& - 2 \varrho K U C^2 a b \sum \frac{m}{\left(m^2 a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)^2} .
\end{aligned}$$

It can also be shown that expression (21) is convergent, when both m and n take an infinite number of values, and expressions (20) and (21) are both real.

Therefore, when there are an infinite number of vortices which move symmetrically on two parallel rows, where the distance between the two vortices of same strength on one row is $2a$, and the distance between the two parallel rows is b , then the force experienced by the cylinder in a uniform flow is along the x -axis and is given by $X - i Y$, which is nothing but the sum of the two expressions (20) and (21) respectively.

In another paper the author will discuss the result that is here obtained and also the case when the vortices are placed asymmetrically following the laws of the Kármán vortex street.

Acknowledgment

My thanks are due to Dr. N. L. GHOSE for the suggestion of the problem.

REFERENCES

- [1] J. L. SYNGE, Proc. Roy. Irish Acad. [A] 37, 95 (1927).
- [2] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics* (1955).
- [3] L. FÖPPL, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder*, Sitzber. k. bayr. Akad. Wiss. 1913.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der unterschiedliche Widerstand an einem Kreiszylinder berechnet, der in einem steten Strom angebracht ist und von einer Anzahl von Wirbelbewegungen in zwei Reihen begleitet ist.

(Received: December 30, 1958.)

Über die Kondensation verschiedener Dämpfe bei adiabatischer Expansion

Von SERGIO BERNASCONI¹⁾ und GEORG GOTSCH²⁾, Locarno-Monti

1. Einleitung und Problemstellung

Verwendete Symbole

- $d\bar{p}$ Druckänderung;
 I an der Photozelle wirksame Strahlungsintensität zu einem beliebigen Zeitpunkt [$\text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}$];
 I_0 wie I , jedoch zu Beginn der Expansion [$\text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}$];
 i van't Hoffscher Faktor;
 M_i Molekulargewicht des Stoffes i [g/Mol];
 m_i Menge des Stoffes i [g];
 \bar{p}_0 Atmosphärendruck [dyn/cm^2];
 \bar{p}^* $\bar{p}_0 + d\bar{p}$ [dyn/cm^2];
 r Radius der Tröpfchen [cm];
 r_{kr} kritischer Gleichgewichtsradius [cm];
 S Übersättigung;
 S_{kr} kritische Gleichgewichtsübersättigung;
 T Temperatur [$^\circ\text{K}$];
 ϱ_i Dichte des Stoffes i [g/cm^3];
 $\sigma_{i/j}$ Oberflächenspannung von i gegen j [dyn/cm].

In dieser Arbeit wird die Kondensation verschiedener Dämpfe an Kondensationskernen bei adiabatischer Expansion untersucht. Die in der Literatur bisweilen vertretene Auffassung, dass das Wachstum der Kondensationskerne entlang den Gleichgewichtskurven für Lösungs- bzw. Mischkerne verläuft, geht auf Vorstellungen von THOMSON [1]³⁾, KÖHLER [2] und JUNGE [3] zurück. Ihre analytische Form wird durch die Gleichungen (1) und (2) wiedergegeben, und zwar:

Für Kerne löslicher Substanz durch die Köhler-Gleichung

$$S = \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3} \quad (1)$$

mit

$$C_1 = \frac{2 \sigma_{v/a} M_{\text{H}_2\text{O}}}{\varrho_{\text{H}_2\text{O}} R^* T},$$

¹⁾ Osservatorio Ticinese della Centrale Meteorologica Svizzera.

²⁾ Forschungsstelle am Osservatorio Ticinese der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 518.

$$C_2 = \frac{3 M_{\text{H}_2\text{O}} m_S}{4 \pi \varrho_{\text{H}_2\text{O}} M_S} \text{ für ideale Lösungen ,}$$

$$C_2 = i \frac{3 M_{\text{H}_2\text{O}} m_S}{4 \pi \varrho_{\text{H}_2\text{O}} M_S} \text{ für dissoziierende Lösungen .}$$

Für Mischkerne, das heisst Kerne, welche zum Teil aus löslicher, zum Teil aus nichtlöslicher Substanz bestehen, durch die Junge-Gleichung:

$$S = \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3 - r_0^3} . \quad (2)$$

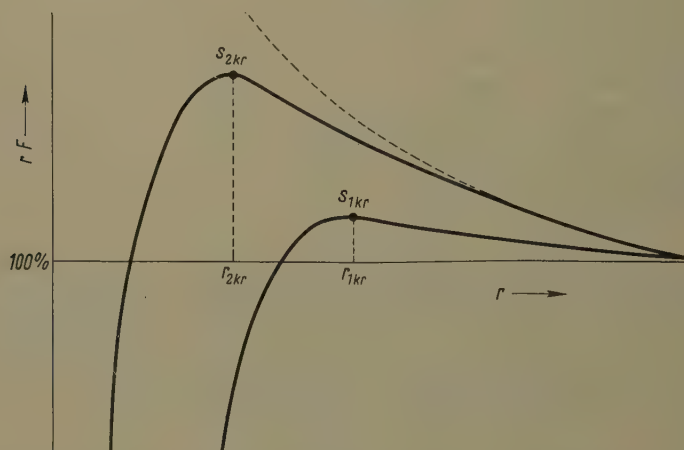
r_0 = Radius des sphärisch angenommenen unlöslichen Bestandteils.

Wie man leicht erkennt, geht Gleichung (2) mit $C_2 = 0$ in die Thomson-Gleichung

$$S = \frac{C_1}{r} \quad (3)$$

für reine Wassertropfchen über, ferner mit $r_0^3 \ll r^3$ in die Köhler-Gleichung. Unter (r_{kr}, S_{kr}) wollen wir den Punkt auf den durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Kurven verstehen, für welchen die Bedingung

$$\frac{dS}{dr} = 0, \quad \frac{d^2S}{dr^2} < 0 \quad (4)$$



Figur 1

Verlauf der Köhlerschen Gleichgewichtskurven für zwei Kerne schematisch gezeichnet.

erfüllt ist und mit WIELAND [4] den Teil der Kurve, für welchen $r < r_{kr}$ ist, das Stadium der Vorkondensation nennen, jenen Kurventeil mit $r > r_{kr}$ das Stadium der eigentlichen Kondensation. Entscheidend dafür, ob ein Kern in das Stadium der Kondensation eintritt, ist nach dieser Betrachtungsweise die Bedingung, dass die Übersättigung S in der Umgebung eines Kerns mindestens den Betrag der kritischen Übersättigung S_{kr} erreicht haben muss, wobei diese nur von der Grösse

und der stofflichen Zusammensetzung des Kerns abhängt. Die skizzierte Theorie berücksichtigt weder die Diffusion noch die Wärmeleitung.

Nach der gegebenen Darstellung können bei einem Vorgang, durch welchen eine kernhaltige Luftprobe um einen gewählten Betrag S_i übersättigt wird, nur jene Kerne in das Stadium der Kondensation eintreten, deren kritische Übersättigung $S_{kr} \leq S_i$ ist. JUNGE [5] folgert aus eigenen Beobachtungen im wesentlichen dasselbe Verhalten der Kondensationskerne. Er übersättigt eine kernhaltige Luftprobe durch eine kleine, adiabatische Expansion, fotografiert die dabei entstehenden Tröpfchen und komprimiert sofort wieder auf das Ausgangsvolumen. Diesen Vorgang wiederholt er mit stets grösser werdenden Expansionsstufen. Um ein Ausregnen der Tröpfchen zu verhindern, lässt er die Kompression in kürzester Zeit auf die Expansion folgen. Aus den Ergebnissen dieses Experimentes folgert JUNGE, dass eine 10prozentige Übersättigung erforderlich ist, um etwa 50% aller «Kerne zu aktivieren» (diesen Ausdruck verwendet man üblicherweise für das Überschreiten des kritischen Radius). Hingegen ergab ein von WIELAND [4] mit einer Mischwolkenkammer durchgeführtes Experiment, dass bei einem natürlichen Aerosol bereits Übersättigungen von $\leq 1,2\%$ genügen, um 1000 bis 10000 Tröpfchen/cm³ ausregnen zu lassen.

Kerndichten gleicher Grössenordnung wurden am Messort auch anhand von längeren Messreihen mit dem kleinen Scholzschen Kernzähler und dem automatischen Kernzähler nach VERZÄR gefunden. Die mit einem Scholzschen Zähler und gleichzeitig mit einer Mischwolkenkammer ausgeführten Messungen von GOTSCH [6] liessen ebenfalls feststellen, dass weniger als 1% Übersättigung ausreicht, um mehr als 50% aller Kerne zu aktivieren. Diese Übersättigung ist demnach um eine Zehnerpotenz kleiner als jene von JUNGE, welcher Widerspruch einen der Verfasser [6] veranlasste, erneut auf die Bedingungen hinzuweisen, unter denen die Gleichungen (1) bis (4) zulässig sind. Wesentlich an ihnen ist, dass sie Gleichgewichtsbeziehungen darstellen, die die Zeit nicht enthalten, welcher Umstand notwendigerweise bei der Deutung von Experimenten berücksichtigt werden muss. Unterhalb der Sättigungsfeuchte kann dieser Vorschrift ohne weiteres nachgekommen werden. Tatsächlich sind die Gleichungen (1) bis (4) bis zu Feuchten von nahezu 100% experimentell bestätigt worden (siehe ausführliche Literatur unter [7]).

Bei Überschreiten der Feuchtesättigung ist die den Kernen zur Kondensation zur Verfügung stehende Zeit beschränkt. Dauer und Ausmass der Kondensation werden dabei durch Diffusionsvorgänge bestimmt, nach deren Ablauf sich wieder ein Gleichgewichtszustand einstellt. In neuerer Zeit ist verschiedentlich versucht worden, dieser Tatsache gerecht zu werden, indem man bei Berechnung der Kondensationsvorgänge die Diffusion und die Wärmeleitung berücksichtigte [8, 9].

Die diesen Rechnungen zugrunde gelegten Modelle eignen sich jedoch nicht zum Vergleich mit den nachfolgend beschriebenen Experimenten, weil die dabei angenommenen Zustandsänderungen so langsam verlaufen, dass man sie mit einer kleinen Expansionskammer nicht nachahmen kann.

Bei dem eben erwähnten Experiment von JUNGE ist die Übersättigung bei allen höheren Expansionsstufen stets über die Aktivierungssättigung der wirksamsten Kerne hinaus gesteigert worden (sofern verschiedene aktive Kerne existieren), und zwar in so kurzer Zeit, dass die Tröpfchen noch nicht aussedimentieren konnten. Wie man aber bei allen Experimenten mit Expansionskammern bis anhin einwandfrei beobachtet hat, beteiligen sich unabhängig von ihrer Aktivität alle Kerne gleichzeitig an der Wasseraufnahme, so dass man sich füglich fragen kann, ob das von JUNGE angenommene verschiedenartige Verhalten der verschiedenen Kerne bei diesen Messungen zu Recht besteht.

MACHE [10] bewies mit einer von ihm ersonnenen Vorrichtung, dass die durch adiabatische Expansion gebildeten Nebeltröpfchen sich ausserordentlich rasch aufbauen und bei Kompression ebenso rasch wieder verdampfen und so einem Druckwechsel bis zu $33\frac{1}{3}$ Hz zu folgen vermögen. Diese Beobachtung führte ihn dazu, eine so schnelle Folge von Kondensation und Verdampfung anzunehmen, dass nach seiner Auffassung die Luftprobe sich nur im Zustande der Feuchtesättigung befindet und somit keine Übersättigung in Erscheinung tritt.

Da MACHE nur Nebel im Moment der grössten Kompression bzw. der stärksten Expansion beobachtete, genügen seine Versuche nicht, zu entscheiden, ob nur eine Auslese oder die Gesamtheit der Kerne sich an der Nebelbildung beteiligen. Ausserdem erhebt sich die Frage, wie rasch Nebelbildung und Druckänderung aufeinander folgen.

2. Die Messapparatur

Die zur Erfüllung der angedeuteten Aufgabe entwickelte Messapparatur gestattete, sowohl die adiabatische Zustandsänderung der Luftprobe als auch die Trübung eines die Luftprobe durchstrahlenden Lichtbündels infolge Nebelbildung als Funktion der Zeit zu ermitteln. Damit kennen wir auch die Trübung (das heisst die Tropfenbildung) als Funktion der Zustandsänderung der Luftprobe.

Das Schema der Messapparatur ist in Figur 2 dargestellt. Als Druckmessgerät diente ein Philips-Druckdifferenzgeber PR 6000 F, welcher mit einem Quecksilbermanometer geeicht worden war. Dieser wandelte eine Druckdifferenz in eine elektrische Spannung um, welche der Druckdifferenz innerhalb $\pm 2,5\%$ linear folgte; die Spannung wurde mit einem Philips-Kathodenstrahloszillographen GM 5666 gemessen. Die tiefste Eigenfrequenz des Gebers lag bei 190 Hz, so dass statische und dynamische Messungen bis etwa 100 Hz ohne nennenswerte Verzerrungen möglich sind. Die Figuren 3 bzw. 4 zeigen Aufnahmen des Mess- bzw. Registrierteils der Apparatur.

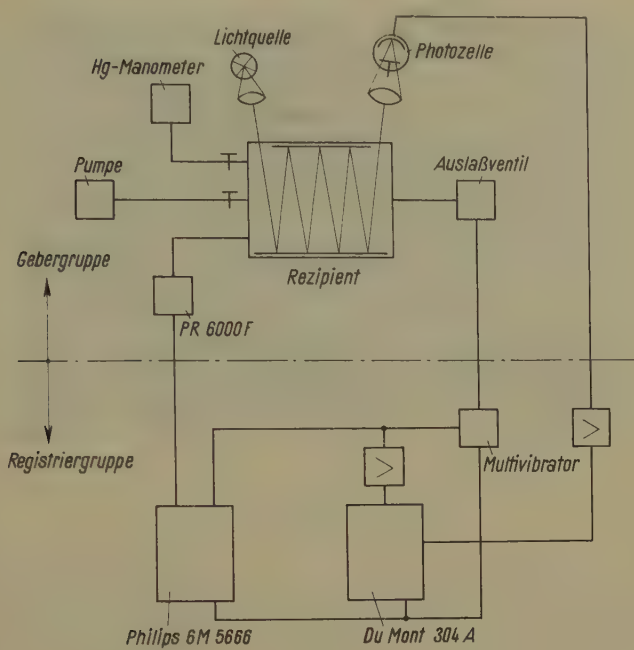
Messung der Extinktion

Ein paralleles Strahlenbündel wurde zwischen zwei im Expansionsgefäss befindlichen Spiegeln mehrfach reflektiert, so dass eine Weglänge des Lichtes zwischen 60 und 200 cm eingestellt werden konnte. Als Lichtquelle diente eine Glühlampe mit 25 W Volleistung, welche aus Batterien gespeist wurde. Nach Durchlaufen des Rezipienten traf der Lichtstrahl die Vakuumphotozelle (Philips 90 CV), welche über einen Verstärker eine der Änderung der Lichtintensität proportionale Spannung an einen Dumont-Kathodenstrahloszillographen 304 A gab. Durch geeignete Massnahmen ist überprüft worden, dass das System Photozelle-Verstärker in dem Bereich

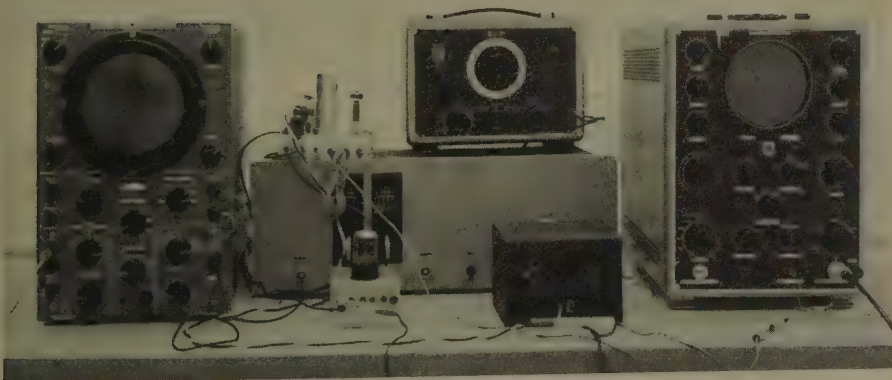
$$1 \geq \frac{I}{I_0} \geq 3 \cdot 10^{-3}$$

linear arbeitete, wobei I_0 die Intensität des ungetrübten, I diejenige des durch die Wolke getrübten Lichtes bedeutet. Die Bezugsspannung am Verstärker konnte beliebig eingestellt und auf diese Weise die ganze Schirmhöhe des Oszillographenbildes ausgenutzt werden.

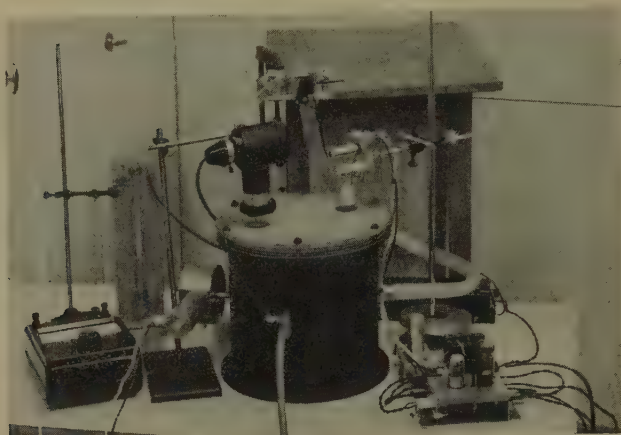
Um die Gleichzeitigkeit von Druck- und Extinktionsmessung zu gewährleisten, erfolgte das Inangasetzen der Anlage durch eine auf dem Schlagbolzenprinzip arbeitende Vorrichtung. Diese schaltete zunächst über ein Verzögerungsrelais einen Multivibrator ein, welcher einen positiven und nach 10 ms einen negativen Spannungsschoss erzeugte. Der erste Spannungsschoss schaltete die einmalige Zeitablenkung



Figur 2
Prinzipschaltbild der Messapparatur.



Figur 3
Aufnahme der Registriergruppe.



Figur 4

Aufnahme der Gebergruppe.

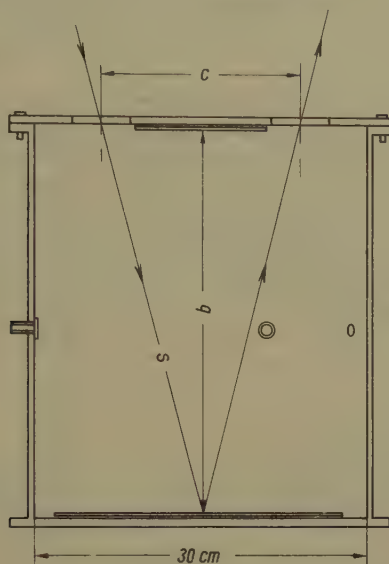
der beiden Kathodenstrahloszillographen ein, während der zweite in deren Z-Ablenkung eingespeist wurde; dadurch wird nach 10 ms Laufzeit auf den Strahlwegen beider Oszillographen gleichzeitig eine Lichtmarke angebracht. Zur Festlegung des zeitlichen Verlaufs der Strahlablenkung ist beiden Oszillographen eine bekannte Frequenz überlagert und sowohl Strahlverlauf wie Eichfrequenz fotografiert worden. Zur Erzeugung der Eichfrequenz diente ein Philips-RC-Generator GM 2315; in einigen Fällen verwendeten wir dazu die Eichspannung der Kathodenstrahloszillographen.

Weniger als 0,1 ms nach dem Einschalten des Multivibrators öffnete der Schlagbolzen das Öffnungsventil. Am Kathodenstrahloszillographen konnte kontrolliert werden, ob der Beginn der Strahlablenkung genau mit dem Beginn der Druckänderung zusammenfiel. Die Innehaltung dieser Bedingung ist für die Auswertung der Aufnahmen wichtig, da die Zeitablenkung am Dumont-Kathodenstrahloszillographen (für das Schreiben der Extinktion) in den ersten 10 ms nicht linear ist.

Das Expansionsgefäß

Als Expansionsgefäß wurde der in Figur 5 skizzierte Zylinder verwendet, mit welchem das Manometer, das Öffnungsventil (über eine kurze Schlauchleitung zur Vermeidung der Übertragung von Erschütterungen beim Öffnen), die Pumpe (über einen Absperrhahn) und der Druckgeber verbunden waren. Weiter befand sich im Zentrum des Expansionsgefäßes ein Thermoelement (Lötstelle leichter als 10^{-3} g), dessen thermische Trägheit, verglichen mit der Einstellzeit des Siemens-Lichtmarkengalvanometers, vernachlässigbar klein war. Im Deckel waren zwei Gläser für den Ein- und Austritt des Lichtstrahles angebracht. Komplanar mit Deckel und Grundfläche sind zwei Spiegel für die Mehrfachreflexion des Lichtstrahles zur Vergrößerung der Weglänge des Lichtes befestigt. Bei Untersuchungen der Wasserdampfkondensation mussten die Spiegel und Gläser gegen Beschlagen durch einen Anstrich von «Permaklar» geschützt werden. Dieser Schutz genügte, um die Intensitätsänderung des Lichtes infolge Wasserabscheidung an besagten Oberflächen

$< 1\%/min$ zu halten, welcher Wert, verglichen mit der durch Nebelbildung hervorgerufenen Intensitätsänderung des Strahles, die auch bei den langsamsten Expansionen $> 10^{100}/10^{-4} min$ beträgt, von vernachlässigbarer Grösse war. Bei Untersuchungen mit Benzin und Azeton waren Schutzmassnahmen nicht notwendig, weil ein Beschlagen der Gläser und Spiegel nicht beobachtet werden konnte. Das Auslassventil wurde so dimensioniert, dass es durch Einbau von Blenden möglich war, den Druckausgleich über eine Druckänderung von 190 mm Hg (stets bezogen auf p^*) wählbar innerhalb 300 ms bis 6 s vorzunehmen.



Figur 5

Skizze des Expansionsgefäßes.

3. Durchführung der Experimente und die Messergebnisse

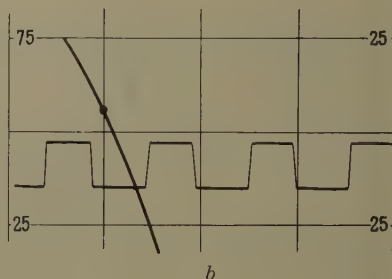
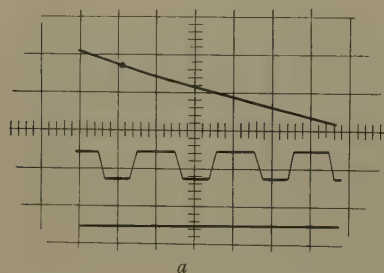
Der zylindrische Teil des Rezipienten wurde (von Öffnungen für die Verbindung abgesehen) mit Fliesspapier ausgekleidet. Dieses ist mit der zu kondensierenden Flüssigkeit benetzt worden. Auch der Boden des Rezipienten wurde mit der zu untersuchenden Flüssigkeit belegt. Hierauf ist im verschlossenen, normale Zimmerluft enthaltenden Rezipienten mit befeuchteter Luft ein Überdruck von 190 mm Hg hergestellt worden. Bei Untersuchungen mit Benzin und Azeton wurde die Kompressionsluft vor Eintritt in den Rezipienten über eine Kühlfalle mit $-14^{\circ}C$ geleitet, um störende Einflüsse des Wasserdampfes bei der Kondensation auszuschalten. Nach Erreichen der gewünschten Kompression erfolgte jedesmal eine Prüfung darüber, ob die Anzeige des Druckgebers der Eichkurve entsprach. Danach wurde abgewartet, bis die Erwärmung infolge Kompression sich im Rezipienten bis auf mindestens $0,1^{\circ}C$ ausgeglichen hatte, was einige Minuten benötigte.

Unter der Annahme, dass mit der gleichen Geschwindigkeit auch die Sättigung angenähert wurde, können wir voraussetzen, dass unmittelbar vor Beginn der Ex-

pansion eine relative Feuchte von etwa 99% geherrscht hat. Ein völliger Temperatureausgleich benötigte mindestens eine Stunde. Eine so lange Wartezeit erwies sich aber ungünstig, weil sich in diesem Falle bereits eine erhebliche Abnahme der Kerndichte im Rezipienten zeigte. Von wenigen Versuchen abgesehen, wurde daher der Nachteil eines geringen Defizits bis zum Erreichen der Sättigung in Kauf genommen.

Expansion und die Registrierung an den beiden Kathodenstrahloszillographen sind in der oben beschriebenen Weise ausgeführt worden. Eine grössere Expansionszeit als 6 s stellte sich als unzumutbar heraus, da nach etwa 10 s die Wärmeübergänge die Messungen zu beeinflussen begannen. Für das Verständnis der Bildung natürlicher Wolken wären aber gerade kleinere Expansionsgeschwindigkeiten von besonderem Interesse gewesen.

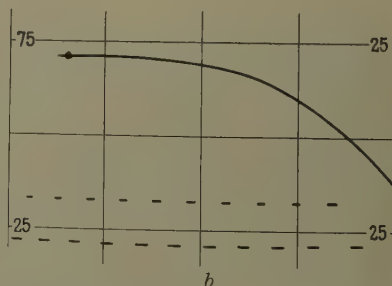
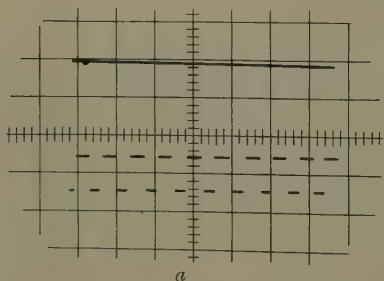
Die Figuren 6 bis 9 geben eine Auslese aus den angefertigten Aufnahmen. Und zwar ist in Figur 6 der Verlauf von Extinktion und Druckabnahme bei einer schnellen Expansion, in Figur 7 bei einer langsamen Expansion von wasserdampfhaltiger Luft wiedergegeben. In Figur 8 ist eine langsame Expansion von benzinhaltiger, in Figur 9 eine schnelle Expansion von azetonhaltiger Luft gezeigt. Die verwendete Eichfrequenz war bei allen vier Aufnahmen 50 Hz; 190 Torr Druckänderung ergaben auf dem Oszillographen eine Änderung von 46 mm; bei den Figuren 6, 7 und 9 entsprach die Intensitätsänderung $0 \leq I \leq I_0$ 15 cm, bei der Figur 8 25 cm Strahlablenkung.



Figur 6

Schnelle Expansion wasserdampfhaltiger Luft:

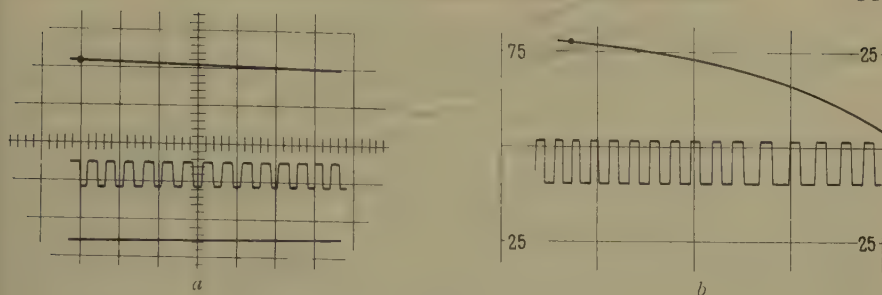
a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; b zeitlicher Verlauf der Extinktion.



Figur 7

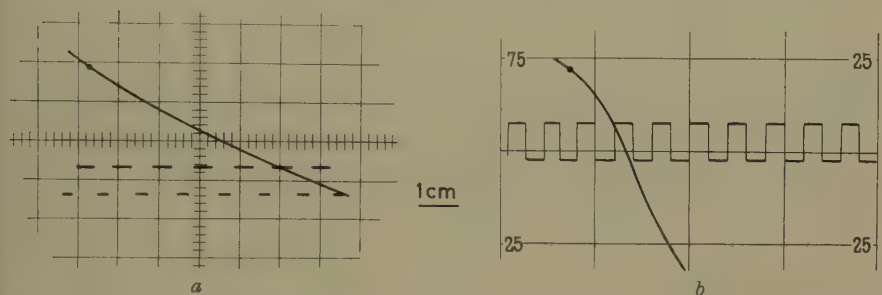
Langsame Expansion wasserdampfhaltiger Luft:

a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; b zeitlicher Verlauf der Extinktion.



Figur 8

Langsame Expansion benzindampfhaltiger Luft:

a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; *b* zeitlicher Verlauf der Extinktion.

Figur 9

Schnelle Expansion azetondampfhaltiger Luft:

a zeitlicher Verlauf der Druckänderung; *b* zeitlicher Verlauf der Extinktion.

Figur 6 demonstriert besonders deutlich, wie schnell die Kondensation erfolgt. Nach 10 ms ist die Lichtintensität an der Photozelle bereits um 10%, nach 20 ms um 33% reduziert. Die Tropfenbildung folgt der Druckänderung so rasch, dass eine zeitliche Verschiebung beider Grössen nicht mehr feststellbar ist. Die Schreibbreite des Strahles entspricht dem zeitlichen Auflösungsvermögen der Aufnahme und liegt bei etwa 1 ms. Dies ist genau die gleiche Zeit, die beim Ablauf der Druckänderung benötigt worden ist, um die Feuchtigkeit im Innern des Gefässes von 99% auf Sättigungsfeuchte zu steigern. Nach 10 ms war das Verhältnis $dp/p^* = 0,0165$ (mit $p^* = 920$ Torr), nach 20 ms war $dp/p^* = 0,03$.

Die Druckänderung, mit welcher der in Figur 7 gezeigte Vorgang verlief, war grössenordnungsmässig 100mal langsamer als bei der Figur 6. Hier erkennen wir deutlich, dass innerhalb der ersten 50 ms die Zunahme der Kern- bzw. Tröpfchengrösse so gering blieb, dass sie keine Trübung des Lichtes bewirkte, wobei das Verhältnis dp/p^* in dieser Zeit etwa 0,005 betrug. Unter der Voraussetzung, dass die Zustandsänderung bis zum Erreichen der Sättigungsfeuchte trockenadiabatisch verläuft, berechnet man, dass die Druckänderung gerade ausreichend war, um die relative Feuchte von 99,4% auf Sättigungsfeuchte zu steigern. Nach weiteren 120 ms ist $dp/p^* \sim 0,008$ und die Lichtintensität an der Photozelle um etwa 22% geschwächt. Ein Vergleich mit Figur 6 lässt erkennen, dass bei der langsamen Expansion die Trübung etwa viermal so rasch erfolgt wie bei der schnellen Expansion.

Aus diesen Beobachtungen an Wassertropfen kann man zweierlei schliessen:

1. Dass es lediglich apparativ bedingt war, wenn bei den Versuchen von MACHE die oberste Frequenz, bei welcher man eine Nebelbildung noch beobachten konnte, bei $33\frac{1}{3}$ Hz lag. Aus der oben gefundenen Zeitdifferenz, nach welcher bei schnellsten Expansionen bereits eine deutliche Trübung festzustellen ist, ergibt sich, dass die Nebelbildung Druckänderungen bis etwa 200 Hz zu folgen vermocht hätte, wenn anstelle einer einmaligen Expansion ein mit gleicher Geschwindigkeit periodisch veränderlicher Druck angewendet worden wäre.

2. Da bei den Figuren 6 und 7 etwa die gleiche Anzahl an Kernen mit einem kleinen Scholzschen Kondensationskernzähler ($8000-9000/\text{cm}^3$) gezählt worden ist, kann man aus der verhältnismässig langsameren Ausbildung der Extinktion mit zunehmender Expansionsgeschwindigkeit ersehen, dass bei sehr grossen Expansionsgeschwindigkeiten der Ablauf der Kondensation durch Diffusionsvorgänge beherrscht und begrenzt wird.

Eine Möglichkeit, die Aufnahmen quantitativ auszuwerten, wird an anderer Stelle beschrieben werden.

Bei den Versuchen mit Azeton und Benzin ist im wesentlichen das gleiche Verhalten wie bei den Versuchen mit Wasser beobachtet worden; die durch Benzinwolken bewirkte Extinktion scheint etwas schneller, jene von Azetonnebeln hervorgerufene Trübung etwas weniger rasch zu erfolgen als die Trübung bei Wasserwolken.

Die oben beschriebenen Befunde sind im wesentlichen bei allen Aufnahmen festgestellt worden. Damit erkennen wir als wichtigstes Ergebnis der vorgenommenen Messungen:

Bei langsamen Expansionen hinkt die Wolkenbildung hinter der Druckänderung um eine kleine Zeitdifferenz von etwa 50 ms nach. Diese selbe Zeit wird jedoch grössenordnungsmässig gerade beansprucht, um die Feuchte vom Ausgangswert auf den Sättigungswert zu bringen. Bei schnellen Expansionen wird dagegen der Sättigungswert so schnell erreicht, dass im wesentlichen keine Aussagen über den Ablauf der Kondensation bis zur Sättigung mehr möglich sind, da das zeitliche Auflösungsvermögen des benutzten Registrierverfahrens dazu nicht genügte. Auch beeinträchtigte bei schnellen Expansionen die Trägheit des Diffusionsvorganges bereits die Kondensationsgeschwindigkeit.

Der Firma Philips AG, Zürich, möchten wir für die kostenfreie Überlassung eines Druckdifferenzgebers, eines RC-Generators sowie eines Kathodenstrahloszillographen zur Durchführung der Versuche danken.

Für das fördernde Interesse, welches Herr Professor Dr. R. SÄNGER, ETH, Zürich, und der Leiter des Osservatorio Ticinese, Herr J. C. THAMS, dieser Arbeit entgegengebracht haben, erlauben wir uns, an dieser Stelle unseren besonderen Dank auszusprechen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. THOMSON, *On the Equilibrium of Vapour at a Curved Surface of Liquid*, Proc. Roy. Soc. Edinb. 7 (1), 63 (1870).
- [2] H. KÖHLER, Geofys. Publ. II (1923), Nr. 1 und Nr. 6.
- [3] CHR. JUNGE, Ann. Met. 3, 129 (1950).
- [4] W. WIELAND, Z. angew. Math. Phys. 7, 428 (1956).
- [5] CHR. JUNGE, Beitr. Geophys. 46, 108 (1936).
- [6] G. GOTSCH, Geof. pura e applicata 42 (1959/I).
- [7] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (Clarendon Press, Oxford 1957).
- [8] W. E. HOWELL, J. Met. 6, 134 (1949).

- [9] W. A. MORDY und C. ROTH, Vortrag am 3. Symposium über Kondensationskerne in Cambridge, erscheint demnächst in Tellus.
- [10] H. MACHE, Met. Z. 50, 393 (1933).

Summary

In accordance with KÖHLER's theory, considerable supersaturation is needed to get the entire body of condensation nuclei to grow into droplets; the degree of saturation is determined by the size of the individual nuclei and their solubility in the condensed liquid. Since it is known that in expansion meters all the atmospheric particles which count as condensation nuclei do in fact grow into droplets, it may be assumed that the designated supersaturation in the expansion chambers is achieved for at least a short space of time. The formation of the theoretically correct degree of supersaturation requires, however, that once the moisture saturation has been exceeded condensation should markedly lag behind pressure variation, in order to allow time for the requisite supersaturation to develop.

Experiments designed to test this question have established that condensation follows extraordinarily quickly on variation of pressure after moisture saturation has been exceeded. Condensation is also virtually uninfluenced by the choice of vapour used. At very high expansion speeds the condensation process is governed by the operative laws of diffusion. Measurements indicate that the degrees of supersaturation occurring in the expansion chambers lie considerably below the level of critical saturation even for the smallest nuclei.

(Eingegangen: 17. Februar 1959.)

Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigem Kupferoxydul zu Kupferoxyd

VON PETER BRÜESCH, Zürich¹⁾

1. Problemstellung

Die nachstehenden Untersuchungen über die partielle Oxydation von pulverförmigen Cu_2O zu CuO sind im Zusammenhang mit Messungen über die Eisbildungsaktivität durchgeführt worden. Sowohl Cu_2O als auch CuO sind in der Literatur²⁾ als Eisbildungskerne bekannt, das heisst, sie vermögen bei einer verhältnismässig hohen Temperatur die Vereisung der Wassertropfchen eines unterkühlten Nebels einzuleiten. Es wird vermutet, dass die Oberfläche der Eisbildungskerne entscheidend an der Eiskeimwirksamkeit beteiligt ist. Um die Rolle der Oberfläche abzuklären, kann zum Beispiel versucht werden, die Oberflächen der Kerne auf möglichst übersichtliche Weise zu stören und den Einfluss dieser Störung auf die Eiskeimaktivität festzustellen. Die naheliegendste Störung besteht in der partiellen Oxydation des Cu_2O zu CuO . In der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, jedes einzelne Teilchen des pulverförmigen Cu_2O mit einer zusammenhängenden CuO -Schicht messbarer Dicke zu umgeben.

¹⁾ Forschungsstelle für Physik der Atmosphäre an der ETH.

²⁾ R. SÄNGER, *The Mechanism of Ice-Forming Nucleability*, Bull. Obs. Puy de Dôme 75 (1958).

2. Die partielle Oxydation

Voraussetzung für die homogene partielle Oxydation ist die Dispergierung des Cu_2O -Pulvers in die das Pulver zusammensetzenden Teilchen. Vorversuche haben gezeigt, dass grössere Konglomerate nicht homogen oxydiert werden können, da sich der Sauerstoff nur an der Oxydation der äusseren Teilchen beteiligt, während die inneren Teilchen des Konglomerates im Oxydationsschatten liegen. Die Dispergierung der Teilchen erfolgt mit einer sogenannten Windsichtungsapparatur: Ein senkrecht aufsteigender Luftstrom führt die Teilchen durch ein konisches Glasgefäss, so dass die Luftgeschwindigkeit von unten nach oben stetig abnimmt. Die Luftgeschwindigkeit ist so gewählt worden, dass die die Sichtungsapparatur verlassenden Teilchen Durchmesser von 1 bis $2\ \mu$ aufweisen. Der die Sichtungsapparatur verlassende Luftstrom führt die dispergierten Teilchen durch einen zylindrischen Oxydationsofen von 100 cm Länge und 7 cm Durchmesser. Die partiell oxydierten Teilchen werden schliesslich auf einem Glasfilter aufgefangen. Alle Versuche sind mit konstanter Sauerstoffkonzentration (Sauerstoffgehalt der Luft) und konstanter, äusserst geringer Teilchenkonzentration durchgeführt. Die Luftgeschwindigkeit im Ofen beträgt etwa 15 cm/min, so dass die Teilchen genügend Zeit haben, die Maximaltemperatur im Ofen anzunehmen. (Die im folgenden angegebenen Temperaturen bedeuten die Maximaltemperaturen im Oxydationsofen.) Der für die partielle Oxydation interessante Temperaturbereich liegt für diese Versuchsanordnung zwischen 330°C und 470°C .

3. Die Analyse der partiell oxydierten Proben

Bei der partiellen Oxydation von Cu_2O zu CuO sind folgende 4 Fälle denkbar:

- Jedes Cu_2O -Teilchen ist von einer zusammenhängenden CuO -Schicht umgeben und daher vollständig von dieser eingekapselt;
- die CuO -Schicht ist nicht zusammenhängend; das heisst, nur ein Teil der Oberfläche ist durch CuO zugedeckt;
- es entsteht ein Gemisch von reinem Cu_2O - und reinen CuO -Teilchen;
- Kombinationen von a), b) und c).

Nimmt man an, dass bei der partiellen Oxydation eine zusammenhängende CuO -Schicht entsteht (Fall a), deren Schichtdicke überall mindestens so gross ist wie die Eindringtiefe der Elektronenstrahlen, so zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme dieser Präparate nur die CuO -Linien, während die Röntgendiagramme bei genügend dicker CuO -Schicht sowohl CuO - als auch Cu_2O -Linien aufweisen. Bei den Möglichkeiten b), c) und d) enthalten dagegen die Elektronenbeugungsdiagramme CuO - und Cu_2O -Linien. Erst die Kombination von Röntgen- und Elektronenbeugungsuntersuchungen lassen also eindeutige Resultate erwarten.

Um Aufschluss über das bei der partiellen Oxydation auftretende Mengenverhältnis von Cu_2O zu CuO zu erhalten, werden Mischungsproben hergestellt, beginnend mit 1,5% Cu_2O , 98,5% CuO bis 98,5% Cu_2O , 1,5% CuO , insgesamt 15 Proben. Es zeigt sich, dass die Nachweisempfindlichkeit des Cu_2O im CuO etwa 1,5%, diejenige des CuO im Cu_2O etwa 3% beträgt. Aus den Intensitätsverhältnissen der Cu_2O - und CuO -Linien, die aus den Diffraktometerdiagrammen bestimmt werden können, ergibt sich eine Eichkurve, die gestattet, zu jedem Intensitätsverhältnis das zugehörige Mischungsverhältnis zu entnehmen. Auf diese Weise lässt sich aus den beobachteten Intensitätsverhältnissen der partiell oxydierten Proben deren Mengenverhältnis zwischen CuO und Cu_2O bestimmen.

Röntgen- und Elektronenbeugungsuntersuchungen erfolgen direkt auf den auf den Glasfilter angelagerten partiell oxydierten Cu_2O -Teilchen. Die gleichen Glas-

filter können sowohl im Röntgendiffraktographen als auch im Elektronendiffraktographen verwendet werden, was die Vergleichsmöglichkeit wesentlich verbessert.

Die folgende Serie der Diffraktometerdiagramme (Figur 1) zeigt die Intensitätsverhältnisse der partiell oxydierten Cu_2O -Proben im Temperaturbereich zwischen 320°C und 470°C . Für die Intensitätsvergleiche ziehen wir die beiden stärksten Cu_2O -Linien (111) und (200) sowie die beiden stärksten CuO-Linien ($\bar{1}11$) und (111) miteinander in Vergleich. Um genauere Intensitätsvergleiche zu gewinnen, wird der Winkelbereich zwischen 34° und 44° in oszillierender Bewegung zweimal abgetastet.

Das Oxydationsdiagramm Nr. 1 der Figur 1 mit einer Oxydationstemperatur von 330°C zeigt nur die beiden Cu_2O -Linien (111) und (200). Der prozentuale Anteil des CuO ist deshalb gemäss der Eichkurve kleiner als 3%. Das Oxydationsdiagramm Nr. 2 der Figur 1 mit einer Oxydationstemperatur von 350°C enthält bereits Andeutungen der beiden stärksten CuO-Linien (111) und ($\bar{1}11$). Das zugehörige Intensitätsverhältnis ergibt dabei einen CuO-Gehalt von etwa 3%. Wird die Oxydationstemperatur weiter gesteigert, so nimmt der CuO-Gehalt rasch zu. Bei 470°C sind keine Cu_2O -Linien mehr nachweisbar.

Die Entscheidung, ob es sich um den erwünschten Fall a) oder um einen der 3 andern Fälle handelt, bringen nun die Elektronenbeugungsdiagramme. Das Studium der Anlagerung des CuO auf den Cu_2O -Teilchen ist vor allem für kleine prozentuale CuO-Gehalte interessant, das heisst im Temperaturbereich zwischen 320°C und 360°C . Die 6 Aufnahmen der Figur 2 zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme im kritischen Temperaturbereich.

Das erste Elektronenbeugungsdiagramm mit einer Oxydationstemperatur von 320°C stellt das Diagramm des reinen Cu_2O mit den folgenden Interferenzen dar:

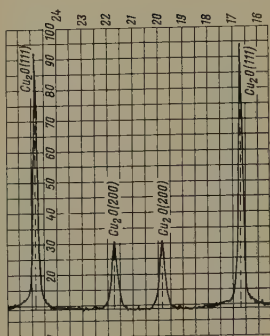
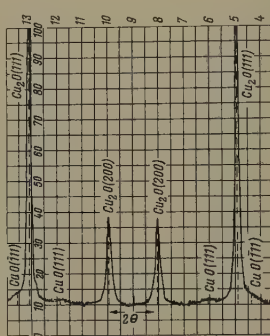
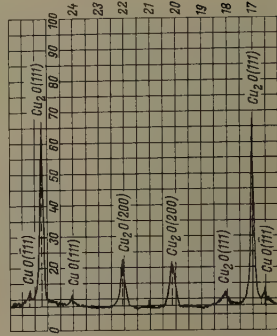
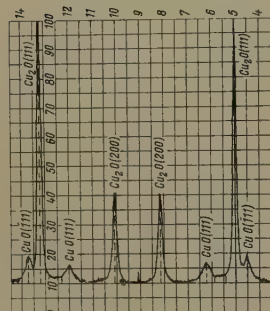
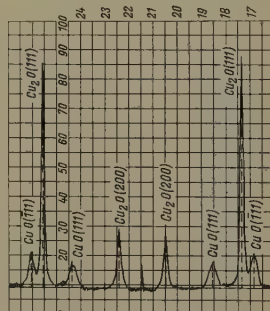
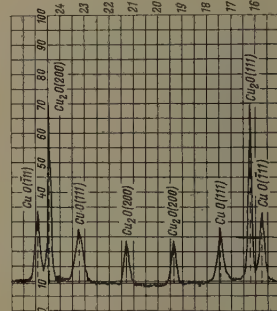
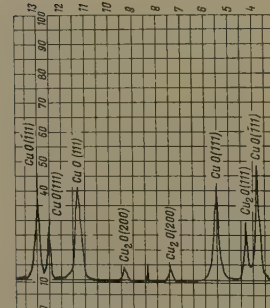
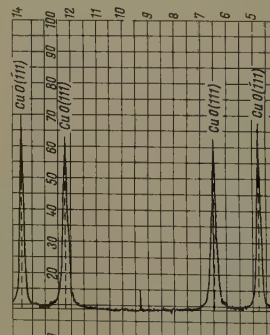
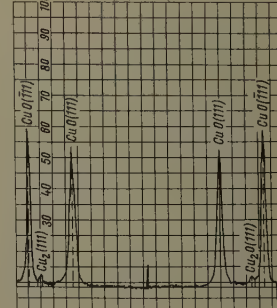
<i>hkl</i> :	(110)	(111)	(200)	(211)	(220)	(311)
<i>I_{rel}</i> :	9	100	37	1	27	17

Dabei bedeuten *hkl* die Millerschen Indizes der Netzebene *hkl*, und *I_{rel}* relative Intensitäten.

Das letzte der Elektronenbeugungsdiagramme mit einer Oxydationstemperatur von 360°C zeigt das Diagramm des reinen CuO mit den folgenden Interferenzen:

<i>hkl</i> :	(110)	($\bar{1}11$)	(111)	($\bar{2}00$)	(202)	($\bar{1}13$)	
<i>I_{rel}</i> :	12	100	96	30	25	20	
<i>hkl</i> :	(022)	($\bar{3}11$)	(310)	(220)	(113)	(311)	(312)
<i>I_{rel}</i> :	12	15		19		7	

Da die Linien (022), ($\bar{3}11$), (310), (220), (113) sehr nahe beieinander liegen, erscheinen sie als eine einzige diffuse Linie. In den Diagrammen Nr. 2 bis 5 werden mit steigenden Temperaturen die Cu_2O -Linien schwächer, die CuO-Linien stärker. So macht sich im 2. Diagramm mit $t = 330^\circ\text{C}$ bereits die CuO-Linie (111) bemerkbar sowie die aus den obengenannten 5 Komponenten bestehende Interferenzlinie. Das 3. Diagramm mit $t = 338^\circ\text{C}$ zeigt schon ziemlich deutlich die beiden stärksten CuO-Linien ($\bar{1}11$) und (111), die aber noch nicht voneinander getrennt erkennbar sind, weil die zwischen ihnen liegende Cu_2O -Linie (111) die Trennschärfe beeinträchtigt. Beim 5. Diagramm treten bereits alle CuO-Linien in Erscheinung, und als einzige Cu_2O -Linie kann nur noch die Linie (200) erkannt werden. Ist die Oxydationstemperatur höher als 350°C (Diagramm Nr. 6 mit $t = 360^\circ\text{C}$), so weist das Beugungsbild nur noch die CuO-Linien auf, während das entsprechende Röntgendiagramm der gleichen Probe (Diagramm Nr. 3, Figur 1) immer noch CuO- und Cu_2O -Linien enthält. Aus der Eichkurve entnehmen wir, dass die Oxydationstemperatur

Diagramm Nr. 1, $t = 330^{\circ}\text{C}$ Diagramm Nr. 2, $t = 350^{\circ}\text{C}$
3% CuO/97% Cu_2O Diagramm Nr. 3, $t = 360^{\circ}\text{C}$
7% CuO/93% Cu_2O Diagramm Nr. 4, $t = 380^{\circ}\text{C}$
15% CuO/85% Cu_2O Diagramm Nr. 5, $t = 400^{\circ}\text{C}$
30% CuO/70% Cu_2O Diagramm Nr. 6, $t = 420^{\circ}\text{C}$
55% CuO/45% Cu_2O Diagramm Nr. 7, $t = 440^{\circ}\text{C}$
80% CuO/20% Cu_2O Diagramm Nr. 8, $t = 460^{\circ}\text{C}$
98% CuO/2% Cu_2O Diagramm Nr. 9, $t = 470^{\circ}\text{C}$

Figur 1
Röntgendiagramme der partiell oxydierten Proben.

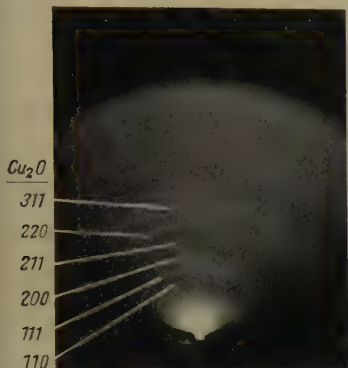


Diagramm Nr. 1, $t = 320^{\circ}\text{C}$

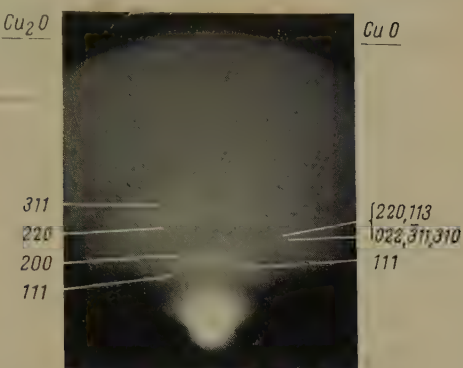


Diagramm Nr. 2, $t = 330^{\circ}\text{C}$



Diagramm Nr. 3, $t = 338^{\circ}\text{C}$

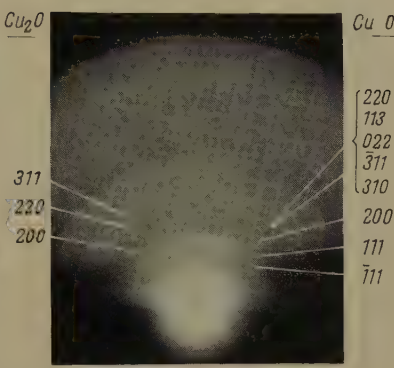


Diagramm Nr. 4, $t = 345^{\circ}\text{C}$



Diagramm Nr. 5, $t = 350^{\circ}\text{C}$

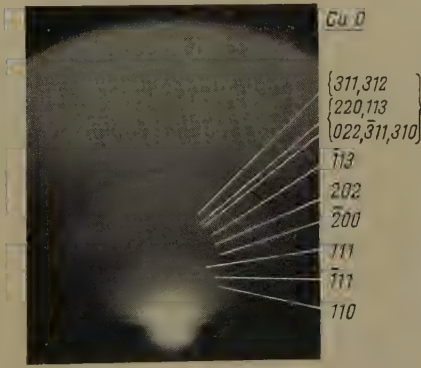


Diagramm Nr. 6, $t = 360^{\circ}\text{C}$

Figur 2

Elektronenbeugungsdiagramme der partiell oxydierten Proben im kritischen Temperaturbereich.

$t = 360^\circ\text{C}$ zu einem CuO -Gehalt von rund 7% führt. Wir stellen damit fest, dass der gefundene CuO -Gehalt von 7% aus einer zusammenhängenden Schicht bestehen muss, welche jedes Cu_2O -Partikel umschliesst.

Ist der CuO -Gehalt hingegen kleiner als 7%, so kann nicht mit Sicherheit auf eine zusammenhängende CuO -Schicht geschlossen werden, denn in diesem Fall zeigen die Elektronenbeugungsdiagramme sowohl CuO - als auch Cu_2O -Linien. Dabei können einerseits die Cu_2O -Interferenzen von freiliegenden Cu_2O -Partien an der Oberfläche herrühren oder andererseits Cu_2O -Linien darstellen, deren zugehörige Schichtdicke kleiner ist als die Eindringtiefe der Elektronenstrahlen. In diesem Fall kann der darunterliegende Cu_2O -Kern ebenfalls zu Cu_2O -Interferenzen Anlass geben. (Der Begriff einer einheitlichen Schichtdicke ist mit Vorsicht anzuwenden, denn es besteht die Möglichkeit, dass bestimmte Netzebenen für den Aufbau der CuO -Schichten besonders günstig sind, andere weniger günstig. Es kann sich also nur um eine mittlere Schichtdicke handeln.)

Eine approximative Berechnung zeigt, dass die mittlere Schichtdicke exponentiell mit der Oxydationstemperatur wächst. Die dünnste, noch nachweisbar zusammenhängende Oxydationsschicht ergibt auf Grund einer approximativen Berechnung eine Schichtdicke von etwa 120 Å.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER für die Übertragung der Aufgabe und das grosse Interesse am Fortgang der Arbeit an dieser Stelle herzlich zu danken. Ebenfalls Dank schulde ich Herrn U. KATZ, Mitarbeiter am Laboratorium für Atmosphärenphysik der ETH, für seine wertvollen Ratsschläge, Herrn Prof. Dr. W. EPPRECHT, Abteilung für industrielle Forschung, für seine Anregungen und Überlassung der Elektronenbeugungsapparatur, Herrn Dr. S. STEINEMANN, Laboratoire Suisse de Recherches Horlogères, für die ersten Elektronenbeugungsaufnahmen, sowie Herrn Dr. B. BÖHLEN, Technisch-chemisches Laboratorium der ETH für die ersten Versuche zur partiellen Oxydation und Herrn Dr. W. JUTZI, Gaslaboratorium der EMPA, für die Überlassung der Windsichtungsapparatur.

Summary

X-ray and electron-diffraction tests show that, with the aid of a combined oxidizing oven and air sifting apparatus, it is possible to achieve partial oxidation of the Cu_2O particles in a powder in such a way that each Cu_2O particle is encased within a composite CuO layer. The thinnest CuO layer which can still be shown to be composite has a mean thickness of about 120 Å according to an approximate method of calculation. The procedures adopted for this experiment cannot determine whether still thinner layers are also composite. The thickness of the CuO layers increases exponentially with the oxidation temperature. This work has been undertaken in conjunction with research into the ice-forming nucleability of substances.

(Eingegangen: 8. Dezember 1958.)

Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren

VON SILVIO CHRISTELLER, Basel

Eine Gleichung 4. Grades mit reellen Koeffizienten der Gestalt

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

lässt sich immer in zwei reelle quadratische Faktoren zerlegen:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + s x + p) (x^2 - s x + q) = 0. \quad (1)$$

Diese Aufspaltung wird im folgenden durchgeführt nach einem Probiervverfahren, das eine Spezialisierung eines von ZURMÜHL [1]¹⁾ und BUCKINGHAM [2] benutzten Verfahrens ist, wobei aber zur Verbesserung der Näherungswerte die Methode von NEWTON-RAPHSON benutzt wird.

Aus (1) folgt durch Koeffizientenvergleich unmittelbar

$$p + q - s^2 = a, \quad (2)$$

$$s (q - p) = b, \quad (3)$$

$$p q = c. \quad (4)$$

Man wählt nun p und berechnet aus (4) $q = c/p$ und dann

$$s = \frac{b}{q - p} = \frac{b}{c/p - p}$$

aus (3). Schliesslich kontrolliert man, ob die Relation (2) erfüllt ist, das heisst, man prüft, ob die Testfunktion

$$T(p) = p + q - s^2 - a = \frac{c}{p} + p - \left(\frac{b}{c/p - p} \right)^2 - a \quad (5)$$

gleich 0 ist²⁾.

Differenziert man $T(p)$ nach p , so ergibt sich

$$T'(p) = 1 - \frac{c}{p^2} - \left(\frac{b}{c/p - p} \right)^2 \frac{2}{p} \cdot \frac{c/p + p}{c/p - p}. \quad (6)$$

Die Berechnung der Ableitung macht hier gar keine Schwierigkeiten und ergibt sich ohne wesentliche Mehrarbeit³⁾.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 527.

²⁾ Auch HARTREE geht vom Ansatz (1) bis (4) aus, wählt aber s und verbessert durch inverse Interpolation; vgl. [3], S. 220–221.

³⁾ Das in [1] angegebene Verfahren geht von drei Werten einer Testfunktion für drei äquidistante Werte der unabhängigen Variablen aus. Verbessert wird durch quadratisches Eingabeln, da die Berechnung der Ableitung der Testfunktion zu umständlich ist. In [2] wird dagegen linear interpoliert.

Durch grobes Probieren findet man immer einen Näherungswert für p in einem der Intervalle $(-k, 0)$ oder $(0, k)$, wo zur Vereinfachung $k = \sqrt{|c|}$ gesetzt wurde. Ist nämlich $c > 0$, dann folgt aus (5)

$$T(+0) = +\infty, \quad T(k) = -\infty$$

und aus (6)

$$T'(p) < 0 \quad (0 < p < k).$$

In $(0, k)$ existiert daher genau ein p_0 mit $T(p_0) = 0$.

Im Falle $c < 0$ hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Zunächst beachte man, dass

$$T(+0) = -\infty, \quad T(-0) = +\infty, \quad T(-\infty) = -\infty$$

ist. Ferner gilt nach (4) und (5)

$$T(-k) = T(k) - s^2 - a.$$

a) Für $T(k) < 0$ existiert in $(-k, 0)$ genau ein p_0 mit $T(p_0) = 0$ wegen $T'(p) > 0$ für $-k < p < 0$.

b) Für $T(k) > 0$ gibt es mindestens ein p_0 in $(0, k)$ mit $T(p_0) = 0$. Unter Umständen ist $T'(p_0)$ sehr klein oder 0. Dann kann man aber p in $(-\infty, -k)$ wählen.

Die ganze Rechnung erfolgt am besten nach einem Schema, wie im folgenden Beispiel (vgl. [1], S. 61):

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 7 = 0. \quad (7)$$

Setzt man $x = y + 0,75$, so erhält man

$$y^4 - 1,375y^2 + 1,625y - 5,32421875 = 0. \quad (8)$$

Somit ist $a = -1,375$, $b = 1,625$ und $c = -5,32421875$. Die beiden Kolonnen für $p = 2$ und $p = 1,75$ wurden mit Hilfe eines Rechenschiebers gerechnet.

	p	2	1,75	1,76	1,762029	1,76203127
①	$q = c/p$	-2,662	-3,055	-3,025124	-3,02164081	-3,02163692
②	$1/p$	-0,662	-1,305	-1,265124	-1,25961181	-1,25960565
③	$① - p$	-4,662	-4,805	-4,785124	-4,78366981	-4,78366819
④	$s = b/③$			-0,339594	-0,33969735	-0,33969747
⑤	$④^2$	0,121	0,114	0,115324	0,11539428	0,11539437
⑥	$T = ③ - ⑤ - a$	0,682	-0,044	-0,005448	-0,00000609	-0,00000002
⑦	$①/p$			-1,718820	-1,71486440	
⑧	$2/p$			1,136363	1,13505509	
⑨	$②/③$			0,264386	0,26331495	
⑩	$⑤/⑧/⑨$			0,034647	0,03448868	
⑪	$T' = 1 - ⑦ - ⑩$			2,684173	2,68037572	
⑫	$T/T' = ⑥/⑪$			$-2,029 \cdot 10^{-8}$	$-2,2721 \cdot 10^{-6}$	

Nach zwei Schritten hat man $p = p_0 = 1,76203127$ auf 8 Dezimalen bestimmt, wobei der Fehler höchstens 10^{-8} beträgt.

Damit ist (8) aufgespalten in

$$(y^2 - 0,33969747y + 1,76203127)(y^2 + 0,33969747y - 3,02163692) = 0.$$

Für die Wurzeln findet man

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,16984873 + 1,31650396 i, \\y_2 &= 0,16984873 - 1,31650396 i, \\y_3 &= -1,91641264, \\y_4 &= 1,57671518,\end{aligned}$$

und damit für die Wurzeln von (7)

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,91984873 + 1,31650396 i, \\x_2 &= 0,91984873 - 1,31650396 i, \\x_3 &= -1,16641264, \\x_4 &= 2,32671518.\end{aligned}$$

Die Summe der Wurzeln (7) beträgt 3,000 000 00 und ihr Produkt – 6,999 999 86.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1957), S. 59–62.
- [2] R. A. BUCKINGHAM, *Numerical Methods* (Pitman & Sons, London 1957), S. 271–272.
- [3] D. R. HARTREE, *Numerical Analysis*, 2nd ed. (Clarendon Press, Oxford 1958).

Summary

In order to determine the roots of an algebraic equation of the fourth degree with real coefficients and removed cubic term a method of splitting up in two quadratic factors is used. The method follows in principle a procedure used, e. g. by ZURMÜHL and BUCKINGHAM to determine the coefficients of the quadratic factors, but permits the use of NEWTON-RAPHSON's method instead of linear or quadratic interpolation.

(Eingegangen: 13. März 1959.)

Varia – Miscellaneous – Divers

ILMAC – Internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboratoriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie

Basel, 10.–15. November 1959

In Basel findet vom 10. bis 15. November 1959 die ILMAC, internationale Fachmesse und Fachtagungen über Laboratoriumstechnik, Messtechnik und Automatik in der Chemie, statt. Die Fachtagungen werden vom Schweizerischen Chemikerverband und der Schweizerischen Gesellschaft für Automatik veranstaltet und bilden zugleich die 22. Veranstaltung der Europäischen Föderation für Chemie-Ingenieur-Wesen. Die Fachmesse wird von den Organen der Schweizer Mustermesse durchgeführt.

Im *Programm der Fachtagungen* sind insgesamt 30 Hauptreferate vorgesehen. Es konnten dafür namhafte Vertreter der Wissenschaft und der Praxis aus Belgien, Deutschland, England, Frankreich, Holland, den USA und der Schweiz gewonnen werden. Ergänzend zum eigentlichen Tagungsprogramm sind noch Referate und Demonstrationen der an der Fachmesse beteiligten Firmen vorgesehen.

Die Tagung für Laboratoriums- und Messtechnik (10. und 11. November 1959) ist auf das Gebiet der Chemie begrenzt mit Hauptreferaten über elektrische Methoden, optische Methoden, Trennverfahren und Isotopenmethoden. Das Programm der anschliessenden Tagung über Automatik umfasst die technischen Fragen der Automation in der Verfahrenstechnik der chemischen Industrie und der Lebensmittelindustrie, ferner die wirtschaftlichen Aspekte der Automation sowie die Datenverarbeitung in der Wirtschaft.

Für weitere Auskunft wende man sich an das Sekretariat der ILMAC, Basel 21.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Principles of Modern Physics. Von ROBERT B. LEIGHTON (McGraw-Hill, London 1959). 795 S., 207 Fig.; 97 sh.

Das vorliegende Werk enthält eine klare Einführung in viele der modernsten und interessantesten Teilgebiete der neueren Physik. Als solche treten auf: die Kernphysik mit den verschiedenen Kernmodellen, die Physik der Elementarteilchen einschliesslich der Strangeness-Theorie von GELL-MANN und NISHIJIMA, das Problem der Paritätsverletzung bei schwachen Wechselwirkungen, die kosmische Strahlung, die Energieerzeugung in Sternen und die Bildung der chemischen Elemente.

Daneben sind auch die klassischen Theorien vertreten in Kapiteln über Atom- und Molekülspektren, die Bändertheorie des Festkörpers und die Röntgenstrahlen.

In Anbetracht der Mannigfaltigkeit des gebotenen Stoffes müssen die formalen mathematischen Entwicklungen auf ein Minimum beschränkt werden. Diese Beschränkung gelingt dem Verfasser oft in ausgezeichnete Weise. Die zwei ersten Kapitel sind der speziellen Relativitätstheorie und der Quantentheorie gewidmet. Das erste dient wohl mehr der Repetition als der Einführung.

Musterhaft sind die knappen historischen Einführungen und die Zusammenfassungen am Ende einzelner Kapitel. Die Schreibweise ist immer klar, lebendig und anregend. Die vielen Übungsaufgaben erlauben dem Leser stets eine Kontrolle seines Verständnisses.

Das Buch kann besonders auch dem Studenten aufs wärmste empfohlen werden.

R. JOST

Colloque National de Magnétisme (Commémoratif de l'œuvre de PIERRE WEISS). (Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1958) 336 S., 174 Abb.; ffrs. 4000.-.

Das Kolloquium zu Ehren von PIERRE WEISS, dem Vater des Ferromagnetismus, vereinigte die französischen Magnetophysiker vom 8. bis 10. Juli 1957 in Strassburg. Mit der leider unvermeidlichen einjährigen Verzögerung ist nun der Tagungsbericht erschienen, der 26 Arbeiten wiedergibt. Ein Drittel des Buches

füllen die drei Hauptvorträge, in welchen die befrachtende Wirkung der Weiss-schen Molekularfeldhypothese auf die weitere Entwicklung der Theorie des Magnetismus gewürdigt wird. NÉEL gibt in seinem Vortrag einen Überblick über die Erfolge der Weiss'schen Vorstellungen und ihre Vervollkommnung durch den Autor selber, der mit Hilfe des lokalen Molekularfeldes das Verhalten von ferri-magnetischen und antiferromagnetischen Substanzen erklären konnte. Eine gründ-liche Einführung in das Gebiet der Weiss'schen Bezirke vermittelt der Vortrag von GUILLAUD und VAUTIER. Die theoretischen Erkenntnisse werden an über zwanzig Photographien von Bitterfiguren diskutiert. PERRIER zeigt in seiner Arbeit, welche mehr oder weniger eine Zusammenfassung seiner Forschungen auf diesem Gebiet darstellt, den Einfluss des Molekularfeldes auf die elektrischen Eigenschaften (Hall-Effekt, Magnetowiderstand) von Ferromagneten. Die übrigen 23 Arbeiten bringen zum Teil neue Messungen und Ergebnisse, zum Teil auch abschliessende Berichte über Untergebiete oder bestimmte Substanzgruppen. Einen breiten Raum nehmen die Untersuchungen an Verbindungen der seltenen Erden, einschliesslich der Gruppe der Granate, ein, während Messungen an den historischen Ferromagneten Eisen und Nickel seltener sind, da diese besonders präzise sein müssen, damit sie etwas Neues bieten können und eine bessere Prüfung existierender Theorien erlauben als die schon von WEISS bestimmten Kurven. Natürlich fehlen auch nicht Arbeiten über Halogenide der Eisengruppe, über Ferrite und Resonanzeffekte. Der Bericht gewährt somit einen umfassenden Einblick in das Forschungsprogramm der französischen Magnetiker, die zur Entwicklung dieses Zweiges der Physik schon immer einen wesentlichen Beitrag leisteten.

F. HULLIGER

Theoretical Mechanics. An Introduction to Mathematical Physics.

Von J. S. AMES und F. D. MURNAGHAN (Dover Publications, London and New York 1958). 462 S., 39 Fig.; \$ 2.00.

Das Werk beginnt mit einem ausführlichen Kapitel über Vektoranalysis und behandelt dann der Reihe nach die Kinematik des starren Körpers, die Dynamik des Massenpunktes und die Kreiseltheorie. Schwingungen und Wellen werden relativ kurz, die analytische Dynamik ausführlicher behandelt, und ein letztes Kapitel führt in die Relativitätsmechanik ein. Das Buch kann als Einführung in die höhere Mechanik bestens empfohlen werden.

H. ZIEGLER

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von

S. FLÜGGE, Bd. 6: *Elastizität und Plastizität* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 642 S., 254 Fig.; DM 145.-.

Der Band umfasst in sechs Beiträgen von angelsächsischen Autoren die wichtigen Kapitel der Kontinuumsmechanik fester Körper mit Ausnahme der nicht-linearen Elastizitätstheorie.

Ein erster Artikel von I. N. SNEDDON und D. S. BERRY, *The Classical Theory of Elasticity*, vermittelt ausgewählte Ausschnitte aus diesem weitläufigen Gebiet. Die Grundgleichungen werden für endliche Deformationen und in der für die Behandlung in krummlinigen Koordinaten geeigneten Tensorschreibweise entwickelt; der Rest des Beitrags beschränkt sich im wesentlichen auf die kartesische Darstellung der Elastizitätstheorie infinitesimaler Verzerrungen. Neben dem Torsionsproblem werden ebene Aufgaben ausführlicher behandelt, vor allem mit der von russischen Mathematikern entwickelten komplexen Methode. Kapitel über räumliche und dynamische Probleme sowie eine kurze Darstellung der thermoelastischen Grundgleichungen beschliessen den Beitrag.

Ein Artikel von H. T. JESSOP, *Photoelasticity*, gibt eine Übersicht über Theorie und Praxis der zwei- und dreidimensionalen spannungsoptischen Verfahren samt Anwendungsbeispielen.

A. M. FREUDENTHAL und HILDA GEIRINGER teilen sich in den Artikel *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*. FREUDENTHAL gibt eine allgemeine, auch thermodynamische Betrachtungen umfassende Einführung in die heute aktuellen Gebiete der Kontinuumsmechanik und stellt vor allem in physikalischer Sicht die grundlegenden Beziehungen der Viskoelastizität, Plastizität und Viskoplastizität zusammen. HILDA GEIRINGER schliesst eine ausgezeichnete Darstellung der Fragestellungen an, die sich um den Begriff des idealplastischen Körpers gruppieren, und diskutiert ausführlich die mathematischen Verfahren zur Behandlung vorwiegend ebener Probleme mit Anwendungen auf elastisch-idealplastische und starrplastische Körper.

Ein weiterer Beitrag von M. REINER, *Rheology*, schliesst sich an die bekannten Veröffentlichungen des Autors an und orientiert in oft eigenwilliger Darstellung hauptsächlich über die Fragestellungen, die für das Grenzgebiet Fest-Flüssig typisch sind.

Ein kurzer Artikel von G. R. IRWIN, *Fracture*, schildert die Behandlung der Ausbreitung von Rissen im festen Körper mit energetisch-statistischen Verfahren, und schliesslich gibt A. M. FREUDENTHAL unter dem Titel *Fatigue* einen zusammenfassenden Beitrag zum Problem der Ermüdung. H. ZIEGLER

Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik. Von K.-R. DORFNER ([Ergebnisse der angewandten Mathematik, Heft 3] Springer-Verlag, Berlin 1957). 150 S., 44 Abb.; DM 26.-.

Der Verfasser hat sich zum Ziel gesetzt, die Grundlagen der linearen Methoden zur Berechnung dreidimensionaler stationärer Überschallströmungen unter Verwendung der in vielen Einzelveröffentlichungen verstreuten Untersuchungen systematisch darzustellen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um das allgemeine Singularitätenverfahren und um die Methode der Überlagerung kegelsymmetrischer Strömungen. Beide Hauptprobleme werden behandelt, das heisst die Berechnung des Strömungsfeldes, insbesondere der Druckverteilung, bei vorgegebener Geometrie des Tragflügels, und umgekehrt die Bestimmung der Geometrie bei vorgegebener Druckverteilung auf dem Tragflügel.

Dem Charakter der Sammlung entsprechend, ist die Darstellung des Stoffes betont mathematisch gehalten. Das Buch enthält weder numerische Beispiele oder Zahlentafeln noch Versuchsergebnisse, so dass seine praktische Verwendung nur dem mathematisch sehr gut geschulten Aerodynamiker zu empfehlen ist.

Interessant ist die konsequente Anwendung der *Théorie des Distributions* von LAURENT SCHWARTZ zur Darstellung unstetiger Funktionen. P. DE HALLER

Principles of Geodynamics. Von A. E. SCHEIDEGGER (Springer-Verlag, Berlin 1958). 280 S., 86 Fig.; DM 49,60.

Dieses Buch gibt einen Überblick über die Geschichte, den Aufbau, die Eigenschaften und die Form der Erde. Es werden vor allem die geologischen, ozeanographischen und geophysikalischen Erfahrungstatsachen zusammengestellt und die zu ihrer Erklärung aufgestellten Theorien besprochen.

Das ist offensichtlich eine weitschichtige und umfangreiche Materie. SCHEIDEGGER hat aber durch eine geschickte und mit der notwendigen Kritik gepaarten Auswahl die Grundzüge der Geodynamik in einer Form dargestellt, die neu ist und Anerkennung verdient.

Das Buch ist in folgende Kapitel aufgeteilt: I. *Physiographic and Geological Data Regarding the Earth*. II. *Geophysical Data Regarding the Earth*. III. *The Mechanics of Deformation*. IV. *Effects of the Rotation of the Earth*. V. *Continents and Oceans*. VI. *Orogenesis*. VII. *Dynamics of Faulting and Folding*. VIII. *Dynamics of Other Features*.

Von den gestreiften Theorien sind natürlich einige reine Spekulationen, und es ist auffallend, wie im Grunde genommen wenig durch Tatsachen gesichert ist.

Das Buch ist allen, die sich mit der Erde als Ganzes befassen, vor allem zur Orientierung, sehr zu empfehlen.

MAX WEBER

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE, Band 51: *Astrophysik II: Sternaufbau* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 830 S., 197 Fig.; DM 175.-.

Dieser zweite astrophysikalische Band im Rahmen des Handbuches der Physik gibt eine umfassende Darstellung des Aufbaues der Sterne, wobei in den meisten Beiträgen über den eigentlichen Gegenstand hinaus auch Probleme der Sternatmosphären behandelt werden, jedoch mehr im Sinne einer Ergänzung als einer Duplizierung von Band I (Sternoberflächen, Doppelsterne).

Der Band wird durch eine knappe und übersichtliche Darstellung der Prinzipien des inneren Aufbaues und der Energieerzeugung der Sterne eingeleitet (M. H. WRUBEL). Die Beiträge über das Hertzsprung-Russell-Diagramm (H. C. ARP) und die Häufigkeit der Elemente im Kosmos (H. E. SUESS, H. C. UREY und L. H. ALLER) stellen die wichtigsten beobachtungsmässigen Grundlagen für das Studium der Sternentwicklung zusammen, mit welchem sich der 150 Seiten umfassende Artikel von E. M. und G. BURBIDGE, der das Kernstück des vorliegenden Bandes darstellt, beschäftigt. Entstehung und Entwicklung der Sterne werden von den verschiedenartigsten Aspekten - Kontraktion, Massenabgabe und -aufnahme, Kernreaktionen, Entstehung und Umwandlung der Elemente, Hertzsprung-Russell-Diagramme - beleuchtet. Dass die Resultate dieser jungen Forschungsrichtung noch vielfach widersprechend sind, wundert uns nicht. Der Artikel gibt deshalb weniger als die übrigen eine enzyklopädische Übersicht, dafür viele stimulierende Ausblicke und Möglichkeiten für die künftige Forschung. Der Band schliesst mit einigen meist kurzen Beiträgen über spezielle Sterne und Sternzustände wie die veränderlichen Sterne, die Sternstabilität, die magnetischen Sterne, weisse Zwerge, Novae und Supernovae. Die Ausführungen über Pulsation und Stabilität der Sterne (P. LEDOUX) sind, verglichen mit den andern Beiträgen, unverhältnismässig breit; man wird dies jedoch nicht bedauern, da es den Nichtspezialisten anderweitig schwer fallen würde, sich in dieser spröden Materie einen Überblick zu verschaffen. M. WALDMEIER

Wellenmechanik. Vorlesung von Prof. Dr. W. PAULI, ausgearbeitet von FRITZ HERLACH und HEINZ E. KNOEPFEL (Verlag des Vereins der Mathematiker und Physiker an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich 1959). 134 S., 33 Abb.; sFr. 19.-.

Inhaltlich besteht der Hauptunterschied zwischen dieser Kursvorlesung über unrelativistische Wellenmechanik und dem unrelativistischen Teil von PAULIS berühmtem Handbuchartikel darin, dass hier die prinzipiellen Fragen knapper, die mathematischen Methoden dagegen ausführlicher behandelt werden. So wird unter anderem das Beispiel des harmonischen Oszillators in der Ebene (in Polarkoordinaten) und des Wasserstoffatoms (diskretes und kontinuierliches Spektrum, Lösung

in sphärischen und in parabolischen Koordinaten) durchgerechnet. Die dabei auftretenden mathematischen Funktionen werden eingehend diskutiert. Besonderes Gewicht wird auf die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle gelegt. Weiter wird eine ganze Reihe von Näherungsverfahren behandelt: Neben der zeitunabhängigen und der zeitabhängigen Störungsrechnung die Sattelpunktmethode, die WKB-Methode und bei den Stössvorgängen die Bornsche Näherung und die Methode der partiellen Wellen. Dagegen wird das oft sehr nützliche Variationsprinzip nicht erwähnt.

Der besondere Stil und die Originalität von PAULIS Vorlesung ist bei der Ausarbeitung erhalten geblieben. Der Stoff ist sehr überlegen und elegant dargestellt, doch stellt der knappe Text an den Leser gewisse Ansprüche. Hin und wieder fehlt eine Erklärung, sei es, dass sie vergessen wurde (wie zum Beispiel die Definition der Operatoren \hat{x} , \hat{p}), sei es, dass Kenntnisse vorausgesetzt wurden, die man von einem jungen Studenten eigentlich nicht erwarten kann (eine derartige Lücke klappt im Vollständigkeitsbeweis für die Hermiteischen Polynome). Dafür treten die wesentlichen Punkte, weil oft unbeschwert von mehr nebensächlichen didaktischen Details, besonders deutlich zutage.

Einem Anfänger kann die Durcharbeitung dieser Vorlesung durchaus empfohlen werden, nötigenfalls unter Heranziehung eines der bekannten Lehrbücher; sie wird ihm zu einer überdurchschnittlichen Beherrschung der Wellenmechanik verhelfen. Für den Kenner der Wellenmechanik ist dieses Buch, dank der meisterhaften Darstellung der mathematischen Funktionen, eine wertvolle Ergänzung zum Handbuchartikel. Die Übersichtlichkeit und ein Sachregister machen es auch als Nachschlagewerk geeignet.

A. THELLUNG

Das Mikroskop. *Seine wissenschaftlichen Grundlagen und seine Anwendung.* Von A. EHRLINGHAUS und L. TRAPP (B. G. Teuber Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1958). 144 S., 94 Abb.; DM 10.80.

Dem Bearbeiter dieser Neuauflage, Dr. L. TRAPP, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Firma Carl Zeiss, Oberkochen, ist es nicht nur gelungen, dem in Mikroskopikerkreisen bereits bekannten *Ehrlinghaus* ein neues Gesicht zu geben, sondern sie auch auf den heutigen Stand von Wissenschaft und Technik zu bringen. Trotz des grossen Bedienungskomforts moderner Mikroskope sind gewisse Kenntnisse über Funktionen und Leistung für die nutzbringende Anwendung der Instrumente unentbehrlich.

In leichtfasslicher Weise behandelt das Buch zuerst die wichtigsten Begriffe und Grundlagen über Lupe, einfaches Mikroskop und die Abbildungsgeometrie des zusammengesetzten Mikroskopes, einschliesslich die verschiedenen Abbildungsfehler, um nach der wellenoptischen Betrachtung der Abbildung zur mehr praktischen Seite überzugehen.

Neben der Beschreibung der Einrichtungen und Handhabung des Mikroskopes und seiner optischen Systeme ist ein ausführlicher Hauptabschnitt den verschiedenen Beleuchtungs- und Beobachtungsverfahren (einschliesslich Phasenkontrastverfahren) gewidmet. Folgende Kapitel befassen sich mit Hilfsapparaten zum Mikroskop, der binokularen Beobachtung, Messungen an mikroskopischen Präparaten und Leistungsprüfung des Mikroskopes. Der Schlussabschnitt des Buches gibt noch einen Überblick über die Zurichtung mikroskopischer Präparate.

So vermittelt das vorliegende Büchlein besonders auch dem interessierten Laien und Anfänger, ohne mathematische oder physikalische Spezialkenntnisse vorauszusetzen, eine wertvolle Hilfe für die Praxis.

B. ZWICKER

Gesammelte mathematische Abhandlungen

von LUDWIG SCHLÄFLI (1814–1895)

In drei Bänden, herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee
der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft

Band I

392 Seiten, mit einem Porträt von L. Schläfli
In Ganzleinenband Fr./DM 54.– (1950)

Band II

381 Seiten. In Ganzleinenband Fr./DM 54.– (1953)

Band III

402 Seiten mit 20 Figuren. In Ganzleinenband Fr./DM 57.– (1956)

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

Neuerscheinung

SCHIESSLEHRE

von WALTER STUTZ, Oberst der Artillerie
Chef der Sektion für Schiessversuche
des Eidgenössischen Militärdepartements in Thun

(1959) 510 Seiten mit 358 Figuren und 75 Tabellen, gebunden Fr./DM 28.50

Die Schiesslehre will weder ein Lehrbuch der Ballistik noch eine Einführung in die Ballistik sein; es gibt vielmehr eine leichtverständliche Orientierung über das weite Gebiet der Schiesslehre und vermittelt die notwendigen Grundlagen zum Verständnis der Waffen und deren zweckmässigem Einsatz, es vermittelt einen Überblick.

Aus dem Inhalt:

Pulver und Sprengstoffe, Vorgänge in der Waffe beim Schuss, Bewegung des Geschosses nach Verlassen der Mündung, Schiessaufgaben, Störungen der Flugbahn, Richtlehre, Geschoßstreuung, Treffwahrscheinlichkeit, Schiessbehelfe, Geschosse, Zünder, Schussladungen, Geschosswirkung, Bestimmen der Wirkungselemente, Wirkungsschiessen, Gesichtspunkte für den Einsatz von Waffen

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART



Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten
unsere Spezialität

Clichés

STEINER+CO

SCHÜTZENMATTSTR. 31

BASEL